ЛЕКЦИИ ПО МЕТОДАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (5 СЕМЕСТР)

А. А. Пожарский

Содержание

1 лекция
1. Комплексная плоскость 4
1.1. Комплексные числа и операции над ними 4
1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа 4
1.3. Последовательности комплексных чисел 6
1.4. Расширенная комплексная плоскость 6
1.5. Множества на комплексной плоскости 7
1.6. Непрерывные функции комплексной переменной 8
2 лекция
2. Регулярные функции 10
2.1. Дифференцируемые функции комплексной переменной 10
2.2. Элементарные функции 13
2.3. Восстановление регулярной функции по ее вещественной (мнимой) части 14
2.4. Обратимость регулярной функции 16
3, 4, 5 лекции
3. Интегрирование регулярных функций 18
3.1. Криволинейный интеграл функции комплексной переменной 18
3.2. Интегральная теорема Коши 18
3.3. Первообразная регулярной функции 22
3.4. Интегральная формула Коши 23
3.5. Равномерная сходимость 25
3.6. Формула Коши для производных регулярной функции 27
3.7. Достаточные условия регулярности 29
6 лекция
4. Ряды Тейлора 31
4.1. Ряды Тейлора 31
4.2. Степенные ряды и их основные свойства 31
4.3. Теорема единственности 33
4.4. Принцип максимума 34
7, 8 лекции
5. Изолированные особые точки 37
5.1. Ряды Лорана 37
5.2. Изолированные особые точки 39
9, 10 лекции
6. Теория вычетов 44
6.1. Вычет в конечной точке 44
6.2. Вычет в бесконечно удаленной точке 45

6 декабря 2015 г.

6.3. Теорема о вычетах 46
6.4. Сведения, полезные для вычисления интегралов по вычетам 48
6.5. Вычисление интегралов от тригонометрических функций по периоду 49
6.6. Вычисление интегралов от рациональных функций по вещественной оси 51
6.7. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, по вещественной оси 53
6.8. Вычисление интегралов, содержащих устранимые особенности на контуре интегрирования 54
6.9. Интеграл в смысле главного значения 55
Коллоквиум
11 лекция
7. Принцип аргумента 60
7.1. Принцип аргумента 60
7.2. Основная теорема алгебры 62
12 лекция
8. Мероморфные функции 64
8.1. Разложение рациональных функций на простые дроби 64
8.2. Разложение мероморфных функций на простые дроби 65
13, 14 лекции
9. Многозначные функции 67
9.1. Аналитическое продолжение 67
9.2. Регулярные ветви многозначных функций 69
9.3. Римановы поверхности простейших многозначных функций 73
9.4. Вычисление интегралов от многозначных функций 75
14 лекция
10. Гамма-функция 77
10.1. Гамма-функция 77
15, 16 лекции
11. Конформные отображения 80
11.1. Геометрические свойства регулярных функций 80
11.2. Локальные свойства конформных отображений 81
11.3. Общие свойства конформных отображений 82
11.4. Дробно-линейные отображения 83
11.5. Конформные отображения единичного круга на себя 85
17 лекция
12. Физические приложения конформных отображений 86
12.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа 86
12.2. Комплексный потенциал плоского поля 87
12.3. Поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости 89
12.4. Поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости (дополнение) 91
12.5. Электростатическое поле 96
18, 19 лекции
13. Операционное исчисление 99
13.1. Преобразование Лапласа 99
13.2. Формула Меллина 102
13.3. Операционный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений 104

20, 21, 22, 23 лекции

14. Асимптотические методы 106
14.1. Асимптотические последовательности 106
14.2. Асимптотическое поведение интегралов типа Лапласа 107
14.3. Формула Стирлинга 115
14.4. Асимптотическое поведение интегралов типа Фурье 115
14.5. Метод перевала 122

Литература

Список литературы 128

1. Комплексная плоскость

1.1. Комплексные числа и операции над ними.

Определение 1.1 (Множество комплексных чисел). *Множеством комплексных чисел* $\mathbb{C}$ *называют множество упорядоченных пар вида* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *на котором определены операции сложения и умножения по следующим правилам.*

- **Аксиома сложения:** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- **Аксиома умножения:** $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Оказывается, что значительно удобнее иметь дело со множеством $\mathbb{C}$, если ввести следующие обозначения. Договоримся вместо комплексного числа вида $(x, 0)$ писать просто x, а вместо $(0, y)$ писать iy, где i – вспомогательный символ, называемый комплексной единицей. Тогда, учитывая, что согласно аксиоме сложения $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$, получим, что произвольное комплексное число (x, y) можно переписать в виде $x + iy$. В дальнейшем, при использовании записи вида $x + iy$ мы будем подразумевать, что x и y – вещественные числа.

Определение 1.2 (Основные операции над комплексными числами). *На множестве* $\mathbb{C}$ *определены следующие операции:*

- **вычитание:** $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;
- **деление:** $\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$;
- **комплексное сопряжение:** $\overline{x + iy} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$;
- **вещественная часть:** $\operatorname{Re}(x + iy) \stackrel{\text{def}}{=} x$;
- **мнимая часть:** $\operatorname{Im}(x + iy) \stackrel{\text{def}}{=} y$;
- **модуль:** $|x + iy| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Определение 1.3 (Экспоненциальная функция). *Для любого* $z \in \mathbb{C}$ *экспоненциальная функция определена равенством*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}.$$

Определение 1.4 (Тригонометрические функции). *Для любого* $z \in \mathbb{C}$ *функции синус и косинус определены равенствами*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Определение 1.5 (Аргумент комплексного числа). *Аргументом комплексного числа* $z = x + iy$ *называют многозначное отображение* Arg, *действующее по правилу*

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \longmapsto \operatorname{Arg} z \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \varphi \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}.$$

Функцию arg, *действующую по правилу*

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \longmapsto \arg z \stackrel{\text{def}}{=} \varphi,$$

где φ *– единственный элемент множества* $\operatorname{Arg} z \cap (-\pi, \pi]$, *называют однозначной ветвью отображения* Arg.

Теорема 1.6 (Тригонометрическая форма записи комплексного числа)**.** *Пусть задано комплексное число* $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Тогда*

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi},$$

где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *– модуль комплексного числа* z *и* φ *– любой элемент множества* $\operatorname{Arg} z$*.*

Доказательство. Из определения 1.5 следует, что

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z| e^{i\varphi}. \square$$

Определение 1.7 (Логарифм комплексного числа)**.** *Логарифмом комплексного числа называют многозначное отображение* Ln*, действующее по правилу*

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \longmapsto \operatorname{Ln} z \stackrel{\text{def}}{=} \ln|z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где $\ln|z|$ *– вещественнозначный логарифм*[1]*.*

Теорема 1.8 (Обратная функция к комплексной экспоненте)**.**

- *Для любого* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *верно, что* $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$*.*
- *Другими словами,* Ln *– это обратная функция к комплексной экспоненте.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Докажем, что

$$\operatorname{Ln} z_0 \subset \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z_0\}. \tag{1.1}$$

Легко видеть, что

$$\forall\ w_0 \in \operatorname{Ln} z_0 = \ln|z_0| + i \operatorname{Arg} z_0\ \exists\ \varphi_0 \in \operatorname{Arg} z_0\ :\ w_0 = \ln|z_0| + i\varphi_0.$$

Таким образом,

$$e^{w_0} = e^{\ln|z_0|} e^{i\varphi_0} = |z_0| e^{i\varphi_0} = z_0$$

и, следовательно, справедливо включение (1.1).

Докажем, что

$$\operatorname{Ln} z_0 \supset \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z_0\}. \tag{1.2}$$

Пусть w_0 удовлетворяет равенству $e^{w_0} = z_0$ и $w_0 = \xi_0 + i\eta_0$. Легко видеть, что

$$e^{w_0} = e^{\xi_0} e^{i\eta_0} = e^{\xi_0} \left(\cos\eta_0 + i \sin\eta_0\right),$$

$$z_0 = |z_0| e^{i\varphi_0} = |z_0| \left(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0\right), \quad \varphi_0 \in \operatorname{Arg} z_0.$$

Откуда получим, что

$$|z_0| = e^{\xi_0}, \quad \cos\eta_0 = \cos\varphi_0, \quad \sin\eta_0 = \sin\varphi_0. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что

$$\xi_0 = \ln|z_0|, \quad \eta_0 = \varphi_0 + 2\pi n,$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$w_0 = \xi_0 + i\eta_0 = \ln|z_0| + i\varphi_0 + 2\pi i n \in \operatorname{Ln} z_0. \square$$

[1] Обратная функция к вещественнозначной экспоненте.

1.3. **Последовательности комплексных чисел.**

Определение 1.9 (Сходящаяся последовательность в $\mathbb{C}$). *Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ из комплексных чисел называют сходящейся, если*

$$\exists\, a \in \mathbb{C} : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n > N\ |z_n - a| < \varepsilon.$$

При этом число a называют пределом последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и используют обозначение

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Лемма 1.10. *Пусть $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $z_n = x_n + iy_n$, $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\left(\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib\right) \iff \left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} y_n = b\right).$$

Доказательство. Самостоятельно (доказана на 1-ом курсе). □

Теорема 1.11 (Основные свойства сходящихся последовательностей в $\mathbb{C}$). *Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящиеся последовательности из комплексных чисел, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = b$. Тогда*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + \zeta_n) = a + b$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n - \zeta_n) = a - b$;
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \cdot \zeta_n) = a \cdot b$;
(4) *пусть дополнительно $b \neq 0$ и $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\zeta_n \neq 0$, тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. Самостоятельно (доказана на 1-ом курсе). □

Определение 1.12 (Фундаментальная последовательность в $\mathbb{C}$). *Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ из комплексных чисел называют фундаментальной, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) : \forall\, n > N\ \forall\, k > N\ |z_n - z_k| < \varepsilon.$$

Теорема 1.13 (Критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbb{C}$). *Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность из комплексных чисел. Тогда*

$\{z_n\}$ – сходящаяся последовательность $\iff$ $\{z_n\}$ – фундаментальная последовательность.

Доказательство. Самостоятельно (доказана на 1-ом курсе). □

Теорема 1.14 (Теорема Больцано-Вейерштрасса). *Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность из комплексных чисел. Тогда существует подпоследовательность $\{z_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, сходящаяся в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Самостоятельно (доказана для вещественных последовательностей на 1-ом курсе). □

1.4. **Расширенная комплексная плоскость.**

Определение 1.15 (Последовательность сходящаяся к ∞). *Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ из комплексных чисел называют сходящейся к бесконечности, если*

$$\forall\, R > 0\ \exists\, N = N(R) : \forall\, n > N\ |z_n| > R.$$

При этом используют обозначение

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

Определение 1.16 (Расширенная комплексная плоскость). *Расширенной комплексной плоскостью называют множество* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *наделенное понятием сходимости, согласно определениям* 1.9 *и* 1.15.

Определение 1.17 (Стереографическая проекция и сфера Римана). *Пусть*

- (x, y, t) – *координаты в* $\mathbb{R}^3$;
- *комплексная плоскость* $\mathbb{C}$ *отождествлена с плоскостью* $t = 0$ *в* $\mathbb{R}^3$;
- S – *сфера в* $\mathbb{R}^3$ *единичного радиуса с центром в точке* $(0, 0, 1)$;
- $P = (0, 0, 2)$ – *«северный» полюс на сфере* S;

Стереографической проекцией расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ *на сферу* S *называют отображение вида*

(1) *любой точке* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *(которая отождествлена с точкой* $M = (x, y, 0)$ *в* $\mathbb{R}^3$*) ставится в соответствии точка на сфере* S, *которая лежит на пересечении отрезка* PM *и проколотой сферы* $S \setminus \{P\}$;
(2) *точке* $z = \infty$ *ставится в соответствие «северный» полюс* P *сферы* S.

Сферу S *называют сферой Римана.*

Теорема 1.18 (Компактность расширенной комплексной плоскости). *Расширенная комплексная плоскость компактна. Другими словами, из любой бесконечной последовательности в* $\overline{\mathbb{C}}$ *можно выделить подпоследовательность сходящуюся в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность в $\overline{\mathbb{C}}$. Если последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то утверждение теоремы следует из теоремы 1.14. Если же последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, то найдется подпоследовательность, сходящаяся к бесконечности. □

1.5. Множества на комплексной плоскости.

Определение 1.19 (Окрестность точки в $\overline{\mathbb{C}}$). *Окрестностью точки* $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ *называют*

- *(случай* $z_0 \in \mathbb{C}$*) любое множество, содержащее открытый круг вида* $\{z \mid |z - z_0| < r\}$, *где* $r > 0$;
- *(случай* $z_0 = \infty$*) любое множество, содержащее подмножество вида* $\{z \mid |z| > R\}$, *где* $R > 0$.

Определение 1.20 (Область). *Множество точек* D *на комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *называют областью, если выполнены следующие условия.*

- **Открытость:** $\forall\ z_0 \in D\ \exists\ r > 0 : \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset D$.
- **Линейная связность:** *для любых двух точек множества* D *найдется ломаная (линия, состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков), соединяющая эти точки, и целиком принадлежащая* D.

Определение 1.21 (Граница области). *Множество точек* ∂D *на комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *называют границей области* D, *если выполнены следующие условия.*

- $\partial D \cap D = \varnothing$.
- $\forall\ z_0 \in \partial D\ \forall\ r > 0$ *верно, что* $\{z \mid |z - z_0| < r\} \cap D \neq \varnothing$.

Определение 1.22 (Замыкание области). *Множество точек* $\overline{D} = D \cup \partial D$ *называют замыканием области* D.

Определение 1.23 (Односвязная область)**.** *Ограниченная область D называется односвязной, если ее граница ∂D связна.*

Связность границы ∂D означает, что не существует открытых множеств A и B таких, что

$$\partial D \subset A \cup B, \quad \partial D \not\subset A, \quad \partial D \not\subset B, \quad A \cap B = \varnothing.$$

1.6. Непрерывные функции комплексной переменной.

Определение 1.24 (Функция комплексной переменной)**.** *Функцией комплексной переменной называется однозначное отображение вида $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, где $D \subset \mathbb{C}$.*

Однозначность отображения f означает, что

$$\forall\ z \in D\ \exists\,!\ w \in \mathbb{C}\ :\ w = f(z).$$

Определение 1.25 (Предел функции комплексной переменной)**.** *Пусть f – функция комплексной переменной, определенная в проколотой окрестности точки z_0. Число $a \in \mathbb{C}$ называют пределом функции f в точке z_0, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ :\ (0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - a| < \varepsilon)\,.$$

При этом пишут

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a.$$

Определение 1.26 (Непрерывность функции комплексной переменной)**.** *Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и задана функция комплексной переменной $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$.*

- *Функция f называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если*[2]

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ :\ (|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)\,.$$

- *Функция f называется непрерывной в в области D, если она непрерывна в каждой точке области D.*
  - *Множество всех непрерывных функций комплексной переменной в области D обозначают через $C(D)$.*

Теорема 1.27 (Необходимое и достаточное условие непрерывности функции комплексной переменной)**.** *Пусть*

- *D – область в $\mathbb{C}$;*
- *$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$;*
- *пусть u и v – вещественная и мнимая части функции f, т. е.*

$$\forall\ z = x + iy \in D \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

  где u и v – вещественно-значные функции двух вещественных переменных;
- *$z_0 = x_0 + iy_0 \in D$.*

Тогда верно, что

$$f \text{ непрерывна в точке } z_0 \iff u \text{ и } v \text{ непрерывны в точке } (x_0, y_0).$$

Доказательство. Необходимость ($\Longrightarrow$). Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности f в точке z_0 следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

[2] Это условие можно заменить на следующее $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Заметим, что

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Следовательно,

$$|z - z_0| < \delta \implies |u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leqslant |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$
$$|z - z_0| < \delta \implies |v(x, y) - v(x_0, y_0)| \leqslant |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что функции u и v непрерывны в точке (x_0, y_0).

Достаточность ($\Longleftarrow$). Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности u и v непрерывны в точке (x_0, y_0) следует, что найдутся $\delta_1 > 0$ такое, что

$$|z - z_0| < \delta_1 \implies |u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и $\delta_2 > 0$ такое, что

$$|z - z_0| < \delta_2 \implies |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагая $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, получим, что

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| \leqslant |u(x, y) - u(x_0, y_0)| + |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \varepsilon. \ \square$$

Замечание 1.28. *В дальнейшем, мы всегда будем предполагать, что запись $f = u + iv$ означает, что u и v – вещественная и мнимая части функции f соответственно.*

2. Регулярные функции

2.1. **Дифференцируемые функции комплексной переменной.** Напомним, что для вещественнозначных функций u и v двух вещественных переменных дифференцируемость (в смысле вещественного анализа) в точке (x, y) означает, что

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R} : u(x+h_x, y+h_y) = u(x,y) + ah_x + bh_y + o(h_x) + o(h_y),$$
$$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : v(x+h_x, y+h_y) = v(x,y) + \alpha h_x + \beta h_y + o(h_x) + o(h_y)$$

при $\mathbb{R} \ni h_x \to 0$ и $\mathbb{R} \ni h_y \to 0$. Отсюда, учитывая, что функцию комплексной переменной можно записать в виде $f = u + iv$, получим

$$\begin{aligned} f(z+h) &= u(x+h_x, y+h_y) + iv(x+h_x, y+h_y) = \\ &= u(x,y) + iv(x,y) + (a+i\alpha)h_x + (b+i\beta)h_y + o(h_x) + o(h_y) = \\ &= f(z) + Ah + B\overline{h} + o(h), \end{aligned}$$

где $z = x + iy$, $h = h_x + ih_y$ и

$$A = \frac{a+i\alpha}{2} + \frac{b+i\beta}{2i}, \quad B = \frac{a+i\alpha}{2} - \frac{b+i\beta}{2i}.$$

Определение 2.1 (Дифференцируемость в смысле вещественного анализа)**.** *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $z \in D$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Говорят, что f дифференцируема в смысле вещественного анализа в точке z, если

$$\exists\, A, B \in \mathbb{C} : f(z+h) = f(z) + Ah + B\overline{h} + o(h)$$

при $\mathbb{C} \ni h \to 0$.

Определение 2.2 (Дифференцируемость в смысле комплексного анализа)**.** *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Говорят, что f дифференцируема в смысле комплексного анализа в точке z, если

$$\exists\, A \in \mathbb{C} : f(z+h) = f(z) + Ah + o(h)$$

при $\mathbb{C} \ni h \to 0$.

Определение 2.3 (Производная в смысле комплексного анализа)**.** *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $z \in D$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Производной в смысле комплексного анализа функции f в точке z называют предел (если он существует)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

который обозначают символом $f'(z)$.

Теорема 2.4 (Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в смысле комплексного анализа)**.** *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $z \in D$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Тогда верно, что*

f дифференцируема в точке $z \iff f$ имеет производную в точке z.

Доказательство. Необходимость ($\Longrightarrow$). Из определения $o(h)$ следует, что существует предел $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Пусть $A : f(z+h) = f(z) + Ah + o(h)$ при $h \to 0$, тогда

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = A + \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = A. \tag{2.1}$$

Достаточность ($\Longleftarrow$). Из того, что D – область следует, что $\exists\ \alpha > 0 : \{\zeta \mid |\zeta - z| < \alpha\} \subset D$. Рассмотрим функцию

$$\beta(h) = \begin{cases} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) & \text{при } 0 < |h| < \alpha, \\ 0 & \text{при } h = 0. \end{cases}$$

Для завершения доказательства достаточно доказать, что $\lim\limits_{h\to 0} \beta(h) = 0$. Из существования производной функции f в точке z следует, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \left(0 < |h| < \delta \Longrightarrow |\beta(h)| = \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\right| < \varepsilon\right). \square$$

Замечание 2.5. *Из* (2.1) *следует, что* $A = f'(z)$.

Теорема 2.6 (Условия Коши-Римана)**.** *Пусть* D *– область в* $\mathbb{C}$, $z = (x, y) \in D$ *и* $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$. *Для того чтобы функция* f *была дифференцируема в смысле комплексного анализа в точке* z, *необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий.*

(1) *Функции* u *и* v *дифференцируемы в смысле вещественного анализа в точке* (x, y).
(2) *В точке* (x, y) *выполняются условия Коши-Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

При этом справедлива формула вида

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Доказательство. Необходимость ($\Longrightarrow$). (1) Следует из мотивировки к определению 2.1.
(2) Из определения 2.2 и замечания 2.5 следует, что

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h), \quad \mathbb{C} \ni h \to 0. \tag{2.2}$$

Полагая $h = \delta \in \mathbb{R}$ в равенстве (2.2), получим

$$u(x+\delta, y) + iv(x+\delta, y) = u(x,y) + iv(x,y) + f'(z)\delta + o(\delta),$$
$$\frac{u(x+\delta,y) - u(x,y)}{\delta} + i\frac{v(x+\delta,y) - v(x,y)}{\delta} = f'(z) + o(1). \tag{2.3}$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в равенстве (2.3) получим, что

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Далее, полагая $h = i\delta$, где $\delta \in \mathbb{R}$, в равенстве (2.2), получим

$$u(x, y+\delta) + iv(x, y+\delta) = u(x,y) + iv(x,y) + f'(z)i\delta + o(\delta),$$
$$\frac{u(x,y+\delta) - u(x,y)}{i\delta} + \frac{v(x,y+\delta) - v(x,y)}{\delta} = f'(z) + o(1). \tag{2.5}$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в равенстве (2.5) получим, что

$$f'(z) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{2.6}$$

Сравнивая правые части в равенствах (2.4) и (2.6), получим, что

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Достаточность ($\Longleftarrow$). Из мотивировки к определению 2.1 и дифференцируемости функций u и v в точке (x, y) следует, что

$$\exists\ A, B \in \mathbb{C} : f(z+h) = f(z) + Ah + B\overline{h} + o(h) \tag{2.7}$$

при $\mathbb{C} \ni h \to 0$.

Полагая $h = \delta \in \mathbb{R}$ в (2.7) получим

$$f(z+\delta) = f(z) + A\delta + B\delta + o(\delta),$$

$$A + B = \frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} + o(1) = \frac{u(x+\delta, y) - u(x, y)}{\delta} + i\frac{v(x+\delta, y) - v(x, y)}{\delta} + o(1). \tag{2.8}$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в равенстве (2.8) получим, что

$$A + B = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \tag{2.9}$$

Полагая $h = i\delta$, где $\delta \in \mathbb{R}$, в (2.7) получим

$$f(z+\delta) = f(z) + Ai\delta - Bi\delta + o(\delta),$$

$$A - B = \frac{f(z+\delta) - f(z)}{i\delta} + o(1) = \frac{u(x, y+\delta) - u(x, y)}{i\delta} + \frac{v(x, y+\delta) - v(x, y)}{\delta} + o(1). \tag{2.10}$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в равенстве (2.10) и, учитывая условия Коши-Римана, получим, что

$$A - B = -i\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}. \tag{2.11}$$

Сравнивая (2.9) и (2.11) получим, что

$$A = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \quad B = 0. \ \square$$

Теорема 2.7 (Основные правила дифференцирования функций комплексной переменной)**.**

(1) *f и g дифференцируемы в $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow (f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$.*
(2) *f и g дифференцируемы в $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow (f(z) - g(z))' = f'(z) - g'(z)$.*
(3) *f и g дифференцируемы в $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow (f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.*
(4) *f и g дифференцируемы в $z \in \mathbb{C}$ и $g(z) \neq 0 \Longrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$.*
(5) *f дифференцируема в $z \in \mathbb{C}$, g дифференцируема в точке $f(z) \in \mathbb{C} \Longrightarrow$ композиция $(g \circ f)$ дифференцируема в точке z, причем $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$.*

Доказательство. Самостоятельно (по аналогии с доказательство аналогичных теорем о дифференцировании функций вещественной переменной). $\square$

Определение 2.8 (Регулярная функция)**.** *Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Функцию f называют регулярной в области D, если она дифференцируема в смысле комплексного анализа в каждой точке области D.*

Множество функций регулярных в области D обозначают через $\mathcal{H}(D)$.

2.2. **Элементарные функции.** Напомним некоторые свойства, а также определения элементарных функций, доказанные и сформулированные на 1-ом курсе.

Теорема 2.9 (Свойства комплексной экспоненты)**.**

(1) $\forall\ z \in \mathbb{C}\ \forall\ \zeta \in \mathbb{C}\ e^{z+\zeta} = e^z \cdot e^\zeta$.

(2) $\forall\ p \in \mathbb{Z}_+$ *справедлива оценка* $e^z = \sum\limits_{n=0}^{p} \frac{z^n}{n!} + O(z^{p+1})$ *при* $z \to 0$.

Доказательство. Без доказательства (доказана на 1-ом курсе). □

Определение 2.10 (Гиперболические функции)**.** *Для любого* $z \in \mathbb{C}$ *гиперболические синус и косинус определены равенствами*

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Теорема 2.11 (Дифференцирование элементарных функций комплексной переменной)**.**

(1) $\forall\ n \in \mathbb{N}\ z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(z^n)' = nz^{n-1}$.
(2) $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(e^z)' = e^z$.
(3) $\sin z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(\sin z)' = \cos z$.
(4) $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(\cos z)' = -\sin z$.
(5) $\operatorname{sh} z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.
(6) $\operatorname{ch} z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

Доказательство. (1) Из определения производной следует, что для любого $z \in \mathbb{C}$ верно, что

$$(z^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}h + O(h^2) - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \left(nz^{n-1} + O(h)\right) = nz^{n-1}.$$

(2) Из свойств комплексной экспоненты следует, что любого $z \in \mathbb{C}$ верно, что

$$(e^z)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^z e^h - e^z}{h} = e^z \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z \lim_{h\to 0} \frac{1 + h + O(h^2) - 1}{h} = e^z.$$

(3) Из определения 1.4 и теоремы 2.7 следует, что для любого $z \in \mathbb{C}$ верно, что

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}\left(\left(e^{iz}\right)' - \left(e^{-iz}\right)'\right) = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

(4) Из определения 1.4 и теоремы 2.7 следует, что для любого $z \in \mathbb{C}$ верно, что

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\left(e^{iz}\right)' + \left(e^{-iz}\right)'\right) = \frac{1}{2}\left(ie^{iz} - ie^{-iz}\right) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

(5) Из определения 2.10 и теоремы 2.7 следует, что для любого $z \in \mathbb{C}$ верно, что

$$(\operatorname{sh} z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\left(e^z\right)' - \left(e^{-z}\right)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos z.$$

(6) Из определения 2.10 и теоремы 2.7 следует, что для любого $z \in \mathbb{C}$ верно, что

$$(\operatorname{ch} z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\left(e^z\right)' + \left(e^{-z}\right)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z.\ \square$$

Замечание 2.12. *Доказательство теоремы* 2.11 *можно проводить с помощью проверки условий Коши-Римана, см. теорему* 2.6.

2.3. Восстановление регулярной функции по ее вещественной (мнимой) части.

Определение 2.13 (Гармоническая функция). *Функция $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ называется гармонической в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если в этой области выполнено равенство $\Delta u = 0$, где*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Теорема 2.14 (Гармоничность вещественной и мнимой части регулярной функции). *Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $f = u + iv \in \mathcal{H}(D)$ и $u, v \in C^2(D)$. Тогда u и v – гармонические функции в области D.*

Доказательство. Из условий Коши-Римана следует, что

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,$$
$$\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \ \square$$

Напомним следующие теоремы.

Теорема 2.15 (Формула Грина). *Пусть*

- *D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂D;*
- *кривая ∂D ориентирована в положительном направлении;*
- *$P \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$, $Q \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$.*

Тогда справедлива формула Грина

$$\oint\limits_{\partial D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Доказательство. Без доказательства (доказана на 2-ом курсе). $\square$

Теорема 2.16 (Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования). *Пусть*

- *D – односвязная область $\mathbb{R}^2$;*
- *$P \in C^1(D)$, $Q \in C^1(D)$*
- *$(x_1, y_1) \in D$, $(x_2, y_2) \in D$;*
- *γ – кусочно-гладкая кривая в D, соединяющая точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).*

Тогда справедливы следующие утверждения.

- *Криволинейный интеграл 2-го рода*

$$\int\limits_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

не зависит от выбора кривой γ, соединяющей точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), тогда и только тогда, когда в области D выполнено условие

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,. \tag{2.12}$$

- *Пусть выполнено условие* (2.12)*, тогда*

$$d\left(\int\limits_{(x_1,x_2)}^{(x,y)} P(\tilde{x},\tilde{y})\,d\tilde{x} + Q(\tilde{x},\tilde{y})\,d\tilde{y}\right) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Без доказательства (доказана на 2-ом курсе). □

Теорема 2.17 (Восстановление регулярной функции по ее вещественной части)**.** *Пусть D – односвязная область и u – гармоническая функция в области D. Тогда существует гармоническая функция v в области D такая, что $f = u + iv$ – регулярная функция в области D.*

Доказательство. Для доказательства теоремы, нам достаточно предъявить явное выражение для функции v и проверить, что полученная таким образом функция f будет регулярна в области D. Для того чтобы *угадать* представление для v, мы предположим, что функция v существует. После того как мы получим явное выражение для функции v мы сможем начать *все сначала*, т. е. забыть о том как именно мы нашли представление для v. Нам останется лишь проверить, что угаданное выражение для v удовлетворяет требованиям теоремы.

Итак, предположим, что требуемая функция v существует. Тогда из условий Коши-Римана получим, что

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{2.13}$$

Пусть теперь (x_0, y_0) – некоторая точка в области D и γ – некоторая кривая соединяющая точки (x_0, y_0) и (x, y). Тогда из (2.13) следует, что

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \int\limits_{\gamma} -\frac{\partial u(\tilde{x},\tilde{y})}{\partial \tilde{y}}\,d\tilde{x} + \frac{\partial u(\tilde{x},\tilde{y})}{\partial \tilde{x}}\,d\tilde{y}. \tag{2.14}$$

Заметим, что криволинейный интеграл 2-го рода в формуле (2.14) корректно определен лишь в силу нашего предположения, что функция v существует. В частности, из этого предположения следует, что интеграл в (2.14) не зависит пути интегрирования γ.

Ясно, что формула (2.14) все еще не пригодна для восстановления функции v из-за наличия слагаемого вида $v(x_0, y_0)$. Учитывая, что слагаемое $v(x_0, y_0)$ не зависит от x и y, заменим его на произвольную постоянную. Окончательно, формула (2.14) может быть переписана в виде

$$v(x,y) = \int\limits_{\gamma} -\frac{\partial u(\tilde{x},\tilde{y})}{\partial \tilde{y}}\,d\tilde{x} + \frac{\partial u(\tilde{x},\tilde{y})}{\partial \tilde{x}}\,d\tilde{y} + C, \tag{2.15}$$

где C – некоторая постоянная.

Докажем теперь, что формула (2.15) корректно определяет некоторую функцию v в области D. Для этого проверим условия теоремы 2.16. Легко видеть, что

$$P = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Отсюда и из гармоничности функции u следует, что $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Таким образом, в силу теоремы 2.16 интеграл в формуле (2.15) не зависит от пути интегрирования и, следовательно, функция v корректно определена в области D.

Из теоремы 2.16 и формулы (2.15) получим, что

$$dv(x,y) = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,dy.$$

Следовательно, в области D выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x},$$

и функция $f = u + iv$ регулярна в области D.

Теорема 2.18 (Восстановление регулярной функции по ее мнимой части)**.** *Пусть D – односвязная область и v – гармоническая функция в области D. Тогда существует гармоническая функция u в области D такая, что $f = u + iv$ – регулярная функция в области D.*

Доказательство. Самостоятельно. □

2.4. Обратимость регулярной функции.

Теорема 2.19 (Теорема об обратной функции)**.** *Пусть*

- *D – окрестность точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;*
- *$F \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$;*
- *$F'(x_0, y_0)$ – обратимая 2×2 матрица.*

Тогда существуют окрестность $U \subset D$ точки (x_0, y_0) и окрестность $V \subset \mathbb{R}^2$ точки $(\alpha_0, \beta_0) = F(x_0, y_0)$ такие, что

(1) *$F : U \to V$ – обратимое отображение;*
(2) *$F^{-1} \in C^1(V)$;*
(3) *$\forall\ (\alpha, \beta) \in V\ (F^{-1})'(\alpha, \beta) = [F'(x,y)]^{-1}\Big|_{(x,y)=F^{-1}(\alpha,\beta)}$.*

Доказательство. Без доказательства (доказана на 1-ом курсе). □

Теорема 2.20 (Достаточное условие обратимости регулярной функции)**.** *Пусть*

- *D – область в $\mathbb{C}$;*
- *$f \in \mathcal{H}(D)$;*
- *$f'(z_0) \neq 0$, где $z_0 \in D$.*

Тогда существуют окрестность $U \subset D$ точки z_0 и окрестность V точки $w_0 = f(z_0)$ такие, что

(1) *$f : U \to V$ – обратимое отображение;*
(2) *$f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$;*
(3) *$\forall\ w \in V\ (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}\Big|_{z=g(w)}$.*

Доказательство. Обратимость функции $f = u + iv$ в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентна обратимости отображения вида

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

в окрестности точки (x_0, y_0). Легко видеть, что

$$\forall\ (x,y) \in D\ F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Из условий Коши-Римана следует, что

$$\det F'(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)^2. \tag{2.16}$$

Теперь из (2.16), условия $f'(z_0) \neq 0$ и из теоремы 2.6 следует, что $\det F'(x_0,y_0) \neq 0$. Таким образом, матрица $F'(x_0,y_0)$ обратима и мы можем воспользоваться теоремой 2.19.

Из теоремы 2.19 следует, что существует окрестность $V \subset \mathbb{R}^2$ точки $(\alpha_0,\beta_0) = F(x_0,y_0)$ такая, что $F : U \to V$ – обратимое отображение, причем в окрестности U матрица $F'(x,y)$ также обратима. Отсюда получаем, что отображение $f : U \to V$ обратимо и для любого $z \in U$ верно, что $f'(z) \neq 0$. Обозначим обратное отображение к f через g.

Рассмотрим произвольную точку $w_1 \in V$ и положим $z_1 = g(w_1) \in U$. Из дифференцируемости функции f в точке z_1 получим, что

$$f(z) = f(z_1) + f'(z_1)(z - z_1) + o(z - z_1) \quad \text{при} \quad z \to z_1.$$

Полагая $w = f(z)$, получим, что

$$\begin{gathered} w = w_1 + f'(z_1)(g(w) - g(w_1)) + o(g(w) - g(w_1)) \quad \text{при} \quad w \to w_1, \\ w - w_1 = (g(w) - g(w_1))\,(f'(z_1) + o(1)) \quad \text{при} \quad w \to w_1, \\ \frac{1}{f'(z_1) + o(1)} = \frac{g(w) - g(w_1)}{w - w_1} \quad \text{при} \quad w \to w_1. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Переходя к пределу при $w \to w_1$ в равенстве (2.17) получим, что g дифференцируема в точке w_1, причем

$$g'(w_1) = \frac{1}{f'(z_1)}. \ \square$$

Теорема 2.21 (Дифференцирование логарифма в смысле комплексного анализа)**.** *Пусть*

- $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*;*
- U *– достаточно малая окрестность точки* z_0 *(не содержащая нуля);*
- $\ln z$ *– произвольная регулярная ветвь многозначного отображения* $\operatorname{Ln} z$ *в* U*.*

Тогда

$$\forall\ z \in U \quad (\ln z)' = \frac{1}{z}\,.$$

Доказательство. Из теоремы 1.8 (обратная функция к комплексной экспоненте) следует, что $\ln z$ – обратная функция к экспоненте. Отсюда и из теорем 2.20 (достаточное условие обратимости регулярной функции) и 2.11 (дифференцирование элементарных функций комплексной переменной) следует, что

$$\forall\ z \in U \quad (\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'}\bigg|_{w=\ln z} = \frac{1}{e^w}\bigg|_{w=\ln z} = \frac{1}{z}\,. \ \square$$

3. Интегрирование регулярных функций

3.1. Криволинейный интеграл функции комплексной переменной.

Определение 3.1 (Криволинейный интеграл функции комплексной переменной вдоль гладкого контура). *Пусть*

- D – *область в* $\mathbb{C}$;
- $f \in C(D)$;
- γ – *гладкая ориентированная кривая в* D;
- *отображение* $\zeta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *задает гладкую параметризацию (т. е.* $\zeta \in C^1[a,b]$*) кривой* γ *с учетом ориентации.*

Криволинейным интегралом от функции f *вдоль контура* γ *называют число*

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(\zeta(t))\zeta'(t)\,dt.$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения в определении* 3.1. *Тогда*

$$\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_\gamma |f(z)|\,dl.$$

Доказательство. По определению криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода имеем

$$\left|\int\limits_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_a^b f(\zeta(t))\zeta'(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(\zeta(t))||\zeta'(t)|\,dt = \int\limits_\gamma |f(z)|\,dl. \ \square$$

3.2. Интегральная теорема Коши.

Теорема 3.3 (Интегральная теорема Коши). *Пусть*

- D – *односвязная область в* $\mathbb{C}$;
- $f \in \mathcal{H}(D)$;
- γ – *(произвольная) ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая в* D.

Тогда

$$\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Проводить доказательство теоремы будем в дополнительном предположении, что производная функции f непрерывна в D ($f' \in C(D)$).

В случае если кривая γ имеет самопересечения, ее можно представить в виде объединения кривых не содержащих самопересечения. Поэтому без ограничения общности можно считать, что кривая γ не имеет самопересечений.

Введем обозначения $f = u + iv$, $z = x + iy$ и $\operatorname{int}\gamma$ – внутренность кривой γ. Без ограничения общности можно считать, что кривая γ ориентирована в положительном направлении. Легко

видеть, что

$$\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = \oint\limits_\gamma \Big(u(x,y)+iv(x,y)\Big)\,(dx+idy) =$$

$$= \oint\limits_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\oint\limits_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy. \tag{3.1}$$

Из односвязности области D следует, что $\operatorname{int}\gamma \subset D$. Отсюда и из условия $f' \in C(D)$ получим, что $u \in C^1(\operatorname{int}\gamma)\cap C(\overline{\operatorname{int}\gamma})$ и $v \in C^1(\operatorname{int}\gamma)\cap C(\overline{\operatorname{int}\gamma})$.

Следовательно, к интегралам, стоящим в (3.1), можно применить формулу Грина (см. теорему 2.15). Используя формулу Грина и условия Коши-Римана, получим

$$\oint\limits_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy = \iint\limits_{\operatorname{int}\gamma}\left(-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy = 0,$$

$$\oint\limits_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy = \iint\limits_{\operatorname{int}\gamma}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (3.1), получим требуемое утверждение. □

Замечание 3.4. *При доказательстве теоремы мы предположили, что производная функции f непрерывна в D. В действительности, доказательство можно провести без этого предположения.*

Теорема 3.5 (Необходимость условия односвязности области в интегральной теореме Коши)**.** *Теорема 3.3 (Интегральная теорема Коши) без условия односвязности области D является неверной.*

Доказательство. Для доказательства данного утверждения построим контрпример. Рассмотрим область $D = \{z \mid 1 < |z| < 3\}$, контур $\gamma = \{z \mid |z| = 2\}$, ориентированный против часовой стрелки, и функцию $f(z) = \frac{1}{z}$. Легко видеть, что область D не является односвязной, γ – ориентированная гладкая замкнутая кривая в D, а функция f регулярна в области D. Таким образом, выполнены все условия теоремы Коши за исключением условия об односвязности области D.

Для завершения доказательства вычислим интеграл

$$\oint\limits_\gamma f(z)\,dz = \oint\limits_\gamma \frac{dz}{z} = \Big[z = 2e^{i\varphi}, \varphi \in (0,2\pi)\Big] = \int\limits_0^{2\pi}\frac{d(2e^{i\varphi})}{2e^{i\varphi}} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{2ie^{i\varphi}}{2e^{i\varphi}}\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i \neq 0. \ \square$$

Теорема 3.6 (Теорема Коши о независимости значения интеграла от контура интегрирования)**.** *Пусть*

- *D – односвязная область в $\mathbb{C}$;*
- *$f \in \mathcal{H}(D)$;*
- *γ_1 и γ_2 – ориентированные кусочно-гладкие кривые в D;*
- *кривые γ_1 и γ_2 имеют общее начало;*
- *кривые γ_1 и γ_2 имеют общий конец.*

Тогда

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Ориентацию на Γ зададим так, чтобы контур γ_1 проходился в положительном направлении, а γ_2 – в отрицательном. Из теоремы 3.3 (интегральная теорема Коши) получим, что

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

получим требуемое утверждение. □

Теорема 3.7 (Интегральная теорема Коши для интеграла по границе области регулярности функции)**.** *Пусть*

- D *– ограниченная односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$*;*
- *граница* γ *области* D *является ориентированной кусочно-гладкой замкнутой кривой.*

Тогда

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Идея доказательства. Пусть γ_ε – ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая, располагающаяся целиком в области D и достаточно близкая к кривой γ. Грубо говоря, мы будем считать, что при $\varepsilon \to 0$ кривая γ_ε в подходящем смысле стремится к кривой γ. Отсюда и из непрерывности функции f в области D вплоть до границы γ можно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz. \tag{3.2}$$

Так как контур γ_ε целиком лежит в области D, то из теоремы 3.3 (Интегральная теорема Коши) следует, что

$$\oint\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0. \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует необходимое утверждение. □

Определение 3.8 (Положительно ориентированная кривая)**.** *Пусть кривая* γ *принадлежит границе области* D *(например, кривые* γ_1*,* γ_2 *и* γ_3 *на рисунке* 1*).*

Говорят, что кривая γ *положительно ориентирована относительно области* D*, если выполнено одно из двух следующих условий.*

(1) *При обходе вдоль кривой* γ *в направлении заданном ориентацией область* D*, остается слева от кривой*[3] *(кривые* γ_1 *и* γ_2 *на рисунке* 1*).*

(2) *У кривой* γ *выделено два «берега» (более точно, два экземпляра кривой* γ*). При обходе вдоль каждого из «берегов» кривой* γ *в направлении заданном ориентацией, справа от данного «берега» располагается второй «берег» кривой, а слева от него – область* D *(кривая* γ_3 *на рисунке* 1*).*

[3]Мы позволим себе не обсуждать вопросы, связанные с ориентацией комплексной плоскости. Грубо говоря, мы будем считать, что мы все время смотрим на комплексную плоскость с одной и той же стороны.

Теорема 3.9 (Интегральная теорема Коши для многосвязной области)**.** *Пусть*

- D *– ограниченная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$*;*
- *граница* γ *(многосвязной) области* D *состоит из конечного числа попарно не пересекающихся кусочно-гладких замкнутых кривых* γ_1*,* γ_2*, …,* γ_n*;*
- *кривые* γ_1*,* γ_2*, …,* γ_n *положительно ориентированы относительно области* D*.*

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Проведем в области D дополнительные гладкие кривые Γ_1, Γ_2, …, Γ_{n-1} так, чтобы новая область

$$D_* = D \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \Gamma_k$$

оказалась односвязной (см. рисунок 2). Зададим на кривых Γ_1, Γ_2, …, Γ_{n-1} положительную

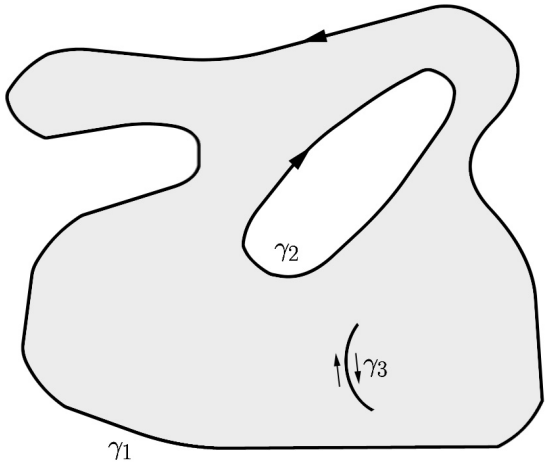

Рис. 1. Область D выделена серым цветом.

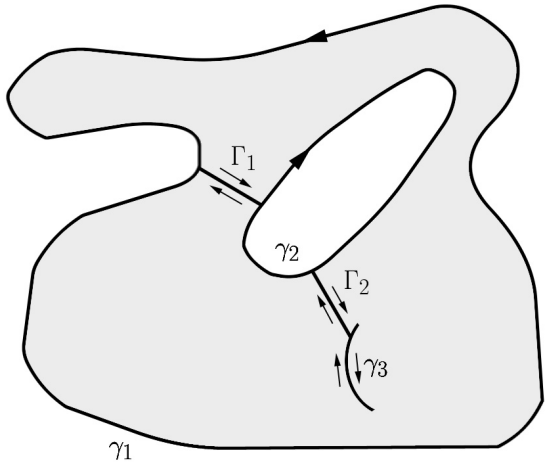

Рис. 2. Область D выделена серым цветом.

ориентацию относительно области D_*. В этом случае граница области D_* окажется положительно ориентированной. Применяя теорему 3.3 (Интегральная теорема Коши) к функции f и области D_* получим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n-1} \oint_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0. \tag{3.4}$$

Заметим теперь, что каждая из кривых Γ_k имеет по два берега Γ_k^+ и Γ_k^-, где $k = 1, \ldots, (n-1)$, которые ориентированы в противоположных направлениях. Учитывая, что значения функции f совпадают на обоих берегах кривых Γ_1, …, Γ_{n-1} (следует из непрерывности функции f в области D), получим, что интегралы соседним берегам каждой из кривых Γ_1, …, Γ_{n-1} отличаются

лишь знаком (в силу противоположной ориентации соседних берегов). Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \oint\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int\limits_{\Gamma_k^+} f(z)\,dz + \int\limits_{\Gamma_k^-} f(z)\,dz \right) = 0. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) следует утверждение теоремы. □

3.3. **Первообразная регулярной функции.**

Теорема 3.10 (Существование первообразной регулярной функции)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*.*

Тогда f *имеет первообразную в области* D*. Более точно,*

$$\exists\ F \in \mathcal{H}(D)\ :\ \forall\ z \in D\ F'(z) = f(z).$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую точку z_0 в области D и рассмотрим функцию вида

$$\forall\ z \in D \quad F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{3.6}$$

Из теоремы 3.6 следует, что значение интеграла в формуле (3.6) не зависит от выбора контура интегрирования. Поэтому формула (3.6) корректно определяет функцию F, причем в интеграле достаточно обозначать только начало (z_0) и конец (z) контура интегрирования.

Для доказательства того, что $F' = f$ в области D, воспользуемся определением производной. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции f в точке z следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|\zeta - z| < \delta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Далее, для любого $h \in \mathbb{C}$ такого, что $|h| < \delta$ верно, что

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} f(z)\,d\zeta \right| = \left| \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} (f(\zeta) - f(z))\,d\zeta \right|.$$

Заметим, что функция F определена в окрестности точки z. Следовательно, можно считать, что последний интеграл вычисляется по прямолинейному отрезку, соединяющему точки z и $z+h$. Следовательно,

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leqslant \frac{1}{|h|} \int\limits_{z}^{z+h} |f(\zeta) - f(z)|\,dl < \frac{\varepsilon}{|h|} \int\limits_{z}^{z+h} dl = \varepsilon. \ \square$$

Теорема 3.11 (Общий вид первообразной регулярной функции)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*;*
- F_1 *и* F_2 *– первообразные функции* f *в области* D*.*

Тогда

$$\exists\ C \in \mathbb{C}\ :\ \forall\ z \in D \quad F_1(z) - F_2(z) = C.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F = F_1 - F_2$. Обозначим ее вещественную и мнимую части через u и v соответственно. Из условия теоремы следует, что

$$\forall\ z \in D \quad F'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

Отсюда и из теоремы 2.6 следует, что

$$\forall\ (x,y) \in D \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Отсюда и из свойств производной вещественной функции получим, что функции u и v постоянны в области D, а следовательно и функция F также постоянна в области D. □

Теорема 3.12 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*;*
- F *– первообразная функции* f *в области* D*.*

Тогда

$$\forall\ z_1 \in D\ \forall\ z_2 \in D \quad \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Доказательство. Из теорем 3.10 и 3.11 следует, что

$$\exists\ C \in \mathbb{C}\ :\ \forall\ z \in D \quad F(z) = \int\limits_{z_1}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + C. \tag{3.7}$$

Полагая $z = z_1$ в равенстве (3.7) получим, что $C = F(z_1)$. Наконец, полагая $z = z_2$ в равенстве (3.7) получим требуемое утверждение. □

3.4. **Интегральная формула Коши.**

Теорема 3.13 (Интегральная формула Коши)**.** *Пусть*

- D *– ограниченная односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*;*
- γ *– кусочно-гладкая замкнутая без самопересечений кривая в* D*;*
- *кривая* γ *положительно ориентирована относительно внутренности* $\mathrm{int}\gamma$*.*

Тогда

$$\forall\ z \in \mathrm{int}\gamma \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Доказательство. Пусть контур $c_r = \{\zeta \mid |\zeta - z| = r\}$ положительно ориентирован относительно своей внутренности. При достаточно малых r окружность c_r принадлежит области D (пусть, для определенности, $c_r \subset D$ при $r \leqslant r_0$). Из теоремы 3.9 следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_r} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{3.8}$$

Проанализируем каждый из интегралов стоящих в правой части (3.8).

Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_r}\frac{f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{f(z)}{2\pi i}\oint\limits_{c_r}\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=\Big[\zeta=z+re^{i\varphi},\ \varphi\in(0,2\pi)\Big]=\frac{f(z)}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}\,d\varphi=f(z).\quad(3.9)$$

Из дифференцируемости функции f в точке z следует, что существует постоянная C такая, что

$$|\zeta-z|\leqslant r_0\quad\Longrightarrow\quad\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|\leqslant C.$$

Следовательно, для любого $r\leqslant r_0$ верно, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{c_r}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right|\,dl\leqslant\frac{C}{2\pi}\oint\limits_{c_r}dl=Cr.\qquad(3.10)$$

Переходя к пределу при $r\to0$ в (3.10) получим, что

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_r}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=0.\qquad(3.11)$$

Заметим теперь, что интеграл в левой части равенства (3.8) не зависит от r. Переходя к пределу при $r\to0$ в (3.8) и, учитывая (3.9) и (3.11), получим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=f(z).\ \square$$

Теорема 3.14 (Интегральная формула Коши для интеграла по границе области регулярности функции)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f\in\mathcal{H}(D)\cap C(\overline{D})$*;*
- *граница* γ *области* D *является кусочно-гладкой замкнутой кривой, положительно ориентированной относительно* D*.*

Тогда

$$\forall\ z\in D\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Идея доказательства. Самостоятельно (по аналогии с доказательством теоремы 3.7). $\square$

Теорема 3.15 (Теорема о среднем для регулярных функций)**.** *Пусть*

- D *– открытый круг радиуса* $r>0$ *с центром в точке* $z\in\mathbb{C}$*;*
- $f\in\mathcal{H}(D)\cap C(\overline{D})$*;*

Тогда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z+re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Доказательство. Пусть γ – окружность радиуса r с центром в точке z, ориентированная в положительном направлении относительно круга D. Из теоремы 3.14 следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \Big[\zeta = z + re^{i\varphi},\ \varphi \in (0, 2\pi)\Big] = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})\,d\varphi. \ \square$$

Теорема 3.16 (Теорема о среднем для гармонических функций)**.** *Пусть*

- D *– открытый круг радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* $z \in \mathbb{C}$*;*
- $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$*;*
- $\Delta u = 0$ *в области* D*.*

Тогда

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Доказательство. Из теоремы 2.17 следует, что найдется гармоническая функция v в области D такая, что $f = u + iv \in \mathcal{H}(D)$. Отсюда и из теоремы 3.15 следует, что

$$\forall\ \rho \in (0, r) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{3.12}$$

Отделяя вещественную часть в равенстве (3.12), и, переходя к пределу при $\rho \to r$, получим требуемое утверждение. $\square$

Теорема 3.17 (Интегральная формула Коши для многосвязной области)**.** *Пусть*

- D *– ограниченная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$*;*
- *граница* γ *области* D *состоит из конечного числа попарно не пересекающихся кусочно-гладких замкнутых кривых* γ_1*,* γ_2*,* $\ldots$*,* γ_n*;*
- *кривые* γ_1*,* γ_2*,* $\ldots$*,* γ_n *положительно ориентированы относительно области* D*.*

Тогда

$$\forall\ z \in D \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\oint\limits_{\gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Доказательство. Самостоятельно (по аналогии с доказательством теоремы 3.9). $\square$

3.5. Равномерная сходимость.

Определение 3.18 (Равномерная сходимость функциональной последовательности)**.** *Пусть*

- D *– множество в* $\mathbb{C}$*;*
- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность комплекснозначных функций на* D*;*

Говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к функции* f *на области* D*, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N > 0\ :\ (z \in D) \wedge (n > N) \implies |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Теорема 3.19 (Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций)**.** *Пусть*

- D *– область или кусочно-гладкая кривая в* $\mathbb{C}$*;*
- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ f_n \in C(D)$*;*
- *последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к функции* f *на области* D*.*

Тогда $f \in C(D)$*.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ и $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что найдется $p \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\forall\ z \in D \quad |f(z) - f_p(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.13}$$

Из непрерывности функции f_p в точке z_0 следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $z \in D$ верно, что

$$|z - z_0| < \delta \implies |f_p(z) - f_p(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что для любого $z \in D$ такого, что $|z - z_0| < \delta$, справедлива оценка

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant |f(z) - f_p(z)| + |f_p(z) - f_p(z_0)| + |f_p(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \ \square$$

Теорема 3.20 (Предельный переход под знаком интеграла для функциональных последовательностей)**.** *Пусть*

- γ *– конечная кусочно-гладкая кривая в* $\mathbb{C}$*;*
- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ f_n \in C(\gamma)$*;*
- *последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к функции* f *на кривой* γ*.*

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и L – длина кривой γ. Из равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что найдется $N > 0$ такое, что

$$\forall\ z \in \gamma\ \forall\ n > N \quad |f(z) - f_p(z)| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $n > N$ справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz - \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz \right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f_n(z) - f(z)|\,dl \leqslant \frac{\varepsilon}{L} \int\limits_{\gamma} dl = \varepsilon. \ \square$$

Определение 3.21 (Равномерный предел семейства функций)**.** *Пусть*

- D *– множество в* $\mathbb{C}$*;*
- U *– окрестность точки* $a_0 \in \mathbb{C}$*;*
- f *– комплекснозначная функция на* $D \times U$*;*

Говорят, что $f(z, a)$ *стремится при* $a \to a_0$ *к функции* $f(z, a_0)$ *равномерно относительно* z *на множестве* D*, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ :\ (z \in D) \wedge (|a - a_0| < \delta) \implies |f(z, a) - f(z, a_0)| < \varepsilon.$$

Теорема 3.22 (Предельный переход под знаком интеграла для семейства функций)**.** *Пусть*

- γ *– кусочно-гладкая кривая в* $\mathbb{C}$*;*

- U – *окрестность точки* $a_0 \in \mathbb{C}$;
- $\forall\ a \in U\ f(\cdot, a) \in C(\gamma)$;
- $f(z, a)$ *стремится при* $a \to a_0$ *к функции* $f(z, a_0)$ *равномерно относительно* z *на кривой* γ.

Тогда

$$\lim_{a \to a_0} \int\limits_\gamma f(z, a)\, dz = \int\limits_\gamma f(z, a_0)\, dz.$$

Доказательство. Самостоятельно (по аналогии с доказательством теорем 3.19 и 3.20). □

3.6. **Формула Коши для производных регулярной функции.**

Теорема 3.23 (Формула Коши для производных регулярной функции)**.** *Пусть*

- D – *ограниченная область в* $\mathbb{C}$;
- $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$;
- *граница* γ *области* D *состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых кривых, положительно ориентированных относительно области* D.

Тогда f – *бесконечно дифференцируема в* D, *причем*

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ z \in D \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{3.15}$$

Доказательство. Докажем формулу (3.15) при $n = 1$. Пусть $z \in D$ и U – окрестность точки z такая, что $U \subset D$. Из теоремы 3.17 следует, что

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{1}{h} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)}\, d\zeta, \tag{3.16}$$

где $h \in \mathbb{C}$ такое, что $z + h \in U$. Заметим теперь, что функция $\frac{1}{\zeta - z - h}$ стремится при $h \to 0$ к функции $\frac{1}{\zeta - z}$ равномерно относительно ζ на кривой γ. Отсюда и из теоремы 3.22 следует, что в равенстве (3.16) справедлив предельный переход при $h \to 0$ под знаком интеграла. В результате получим, что

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Пусть формула (3.15) верна при $n = p$. Докажем, что она верна при $n = p + 1$. При $U \ni h \to 0$ верно, что

$$\frac{f^{(p)}(z+h) - f^{(p)}(z)}{h} = \frac{p!}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{1}{h} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{p+1}} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} \right) d\zeta =$$

$$= \frac{p!}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{h} \frac{(\zeta - z)^{p+1} - (\zeta - z - h)^{p+1}}{(\zeta - z - h)^{p+1}(\zeta - z)^{p+1}}\, d\zeta = \frac{p!}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{h} \frac{(p+1)(\zeta - z)^p h + O(h^2)}{(\zeta - z - h)^{p+1}(\zeta - z)^{p+1}}\, d\zeta =$$

$$= \frac{(p+1)!}{2\pi i} \oint\limits_\gamma f(\zeta) \frac{(\zeta - z)^p + O(h)}{(\zeta - z - h)^{p+1}(\zeta - z)^{p+1}}\, d\zeta. \tag{3.17}$$

Из теоремы 3.22 следует, что в формуле (3.17) возможен предельный переход при $h \to 0$ под знаком интеграла. Следовательно,

$$f^{(p+1)}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(p)}(z+h) - f^{(p)}(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(p+1)!}{2\pi i} \oint\limits_\gamma f(\zeta) \frac{(\zeta - z)^p + O(h)}{(\zeta - z - h)^{p+1}(\zeta - z)^{p+1}}\, d\zeta =$$

$$= \frac{(p+1)!}{2\pi i} \oint\limits_\gamma f(\zeta) \lim_{h\to 0} \frac{(\zeta - z)^p + O(h)}{(\zeta - z - h)^{p+1}(\zeta - z)^{p+1}}\, d\zeta = \frac{(p+1)!}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+2}}\, d\zeta. \ \square$$

Теорема 3.24 (Теорема Лиувилля)**.** *Пусть*

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$;
- $\exists\, C > 0 \ : \ \forall\, z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leqslant C$.

Тогда f – постоянная функция в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть z – произвольная точка в $\mathbb{C}$ и γ_R – окружность радиуса R с центром в точке z. Тогда из теоремы 3.23 следует, что

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2}\, dl \leqslant \frac{C}{2\pi R^2} \oint\limits_{\gamma_R} dl = \frac{C}{R}. \tag{3.18}$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в неравенстве (3.18) получим, что $|f'(z)| \leqslant 0$ и, следовательно,

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \quad f'(z) = 0.$$

Отсюда и из формулы Ньютона-Лейбница получим, что

$$\forall\, z_1 \in \mathbb{C}\ \forall\, z_2 \in \mathbb{C} \quad f(z_2) - f(z_1) = \int\limits_{z_1}^{z_2} f'(z)\, dz = 0. \ \square$$

Теорема 3.25 (Обобщенная теорема Лиувилля)**.** *Пусть*

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$;
- $\exists\, C > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} \ : \ \forall\, z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leqslant C(|z|^n + 1)$.

Тогда f – полином степени не выше n.

Доказательство. Пусть z – произвольная точка в $\mathbb{C}$ и γ_R – окружность радиуса $R > |z|$ с центром в точке z. Тогда из теоремы 3.23 следует, что

$$|f^{(n+1)}(z)| \leqslant \frac{(n+1)!}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+2}}\, dl \leqslant \frac{C(n+1)!}{2\pi R^{n+2}} \oint\limits_{\gamma_R} (|\zeta|^n + 1)\, dl =$$

$$= \frac{C(n+1)!}{2\pi R^{n+2}} \oint\limits_{\gamma_R} (|z + (\zeta - z)|^n + 1)\, dl \leqslant \frac{C(n+1)!}{2\pi R^{n+2}} \oint\limits_{\gamma_R} (|z| + R + 1)^n\, dl \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(n+1)!}{2\pi R^{n+2}} \oint\limits_{\gamma_R} (2R+1)^n\, dl = C(n+1)!\, \frac{(2R+1)^n}{R^{n+1}}.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в последнем неравенстве получим, что

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \quad f^{(n+1)}(z) = 0.$$

Отсюда и из формулы Ньютона-Лейбница получим, что $\forall\ z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= f^{(n)}(0) + \int\limits_0^z f^{(n+1)}(\zeta)\,d\zeta = f^{(n)}(0), \\ f^{(n-1)}(z) &= f^{(n-1)}(0) + \int\limits_0^z f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta = f^{(n-1)}(0) + \int\limits_0^z f^{(n)}(0)\,d\zeta = f^{(n-1)}(0) + f^{(n)}(0)z, \\ &\dots \\ f(z) &= f(0) + f'(0)z + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}z^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n. \ \square \end{aligned}$$

3.7. **Достаточные условия регулярности.**

Теорема 3.26 (Теорема Мореры)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in C(D)$*;*
- *для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой в* D *верно, что* $\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Тогда $f \in \mathcal{H}(D)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\forall\ z \in D \quad F(z) = \int\limits_{z_0}^z f(\zeta)\,d\zeta, \tag{3.19}$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка в области D. Из условий теоремы следует, что интеграл в формуле (3.19) не зависит от выбора контура интегрирования. Следовательно, функция F однозначно определена в области D.

Докажем теперь, что $F' = f$ в области D. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции f в точке z следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|\zeta - z| < \delta \implies |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Далее, для любого $h \in \mathbb{C}$ такого, что $|h| < \delta$ верно, что

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} f(z)\,d\zeta\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z))\,d\zeta\right|.$$

Заметим, что функция F определена в окрестности точки z. Следовательно, можно считать, что последний интеграл вычисляется по прямолинейному отрезку, соединяющему точки z и $z+h$. Следовательно,

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int\limits_z^{z+h} |f(\zeta) - f(z)|\,dl < \frac{\varepsilon}{|h|}\int\limits_z^{z+h} dl = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что $F' = f$ и $F \in \mathcal{H}(D)$.

Наконец, из теоремы 3.23 следует, что $f \in \mathcal{H}(D)$ (как производная регулярной функции). $\square$

Теорема 3.27 (Теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*

- $\forall\ n \in \mathbb{N}\ f_n \in \mathcal{H}(D)$;
- *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно на* D *к функции* f.

Тогда

(1) $f \in \mathcal{H}(D)$;

(2) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ *сходится равномерно на* D *к функции* f'.

Доказательство. (1) Пусть γ – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур в D. Из теоремы 3.3 (интегральная теорема Коши) следует, что

$$\forall\ N \in \mathbb{N} \quad \int\limits_{\gamma} \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\,dz = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz = 0. \tag{3.20}$$

Из теоремы 3.20 следует, что в равенстве (3.20) можно перейти к пределу при $N \to \infty$ под знаком интеграла. Следовательно,

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\gamma} \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\,dz = 0. \tag{3.21}$$

Из (3.21) и теоремы 3.26 (теорема Морера) следует, что $f \in \mathcal{H}(D)$.

(2) Без доказательства. $\square$

4. Ряды Тейлора

4.1. Ряды Тейлора.

Теорема 4.1 (Теорема о разложении регулярной функции в ряд Тейлора). *Пусть*

- $D = \{z \mid |z - z_0| < R\}$, *где* $z_0 \in \mathbb{C}$ *и* $R > 0$.
- $f \in \mathcal{H}(D)$.

Тогда

$$\forall\, z \in D \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{4.1}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку z_* в области D. Легко видеть, что найдется $R_* \in (0, R)$ такое, что $|z_* - z_0| < R_*$. Из теоремы 3.13 (интегральная формула Коши) следует, что

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_*}\, d\zeta,$$

где $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = R_*\}$.

Заметим, что для любого $\zeta \in \gamma$ верно, что

$$\frac{1}{\zeta - z_*} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z_* - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_* - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_* - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{4.2}$$

При этом ряд, стоящий в правой части равенства (4.2), сходится равномерно по ζ на окружности γ. Отсюда и из теоремы 3.20 получим, что

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_* - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z_* - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Наконец, из теоремы 3.23 следует, что

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \quad \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \ \square$$

Определение 4.2 (Ряд Тейлора). *Ряд* (4.1) *называют рядом Тейлора функции* f *с центром в точке* z_0.

4.2. Степенные ряды и их основные свойства.

Определение 4.3 (Степенной ряд). *Степенным рядом с центром в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$ *называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots, \tag{4.3}$$

где $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– комплексная последовательность и* z *– комплексный параметр.*

Теорема 4.4 (Формула Коши-Адамара). *Для любого степенного ряда вида* (4.3) *существует неотрицательное число* R *такое, что ряд* (4.3) *абсолютно сходится при* $|z - z_0| < R$ *и расходится при* $|z - z_0| > R$.

Более того, справедлива формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

причем если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, *полагают* $R = +\infty$, *а если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, *то* $R = 0$.

Доказательство. Без доказательства (доказано на 1-ом курсе). □

Определение 4.5 (Радиус сходимости степенного ряда)**.** *Число* R, *определенное в теореме* 4.4, *называют радиусом сходимости степенного ряда* (4.3).

Теорема 4.6 (Регулярность суммы степенного ряда)**.** *Пусть* $R > 0$ – *радиус сходимости степенного ряда* (4.3). *Тогда*

(1) *ряд* (4.3) *равномерно сходится в любом круге вида* $|z - z_0| \leqslant R_*$, *где* $R_* \in (0, R)$;
(2) *сумма ряда* (4.3) *является регулярной функцией в круге его сходимости* $|z - z_0| < R$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное R_* из интервала $(0, R)$ и введем обозначение $D_* = \{z \mid |z - z_0| < R_*\}$. Заметим, что из абсолютной сходимости ряда (4.3) внутри круга его сходимости следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R_*^n$$

сходится. При $z \in \overline{D_*}$ верно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z - z_0|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R_*^n < \infty.$$

Это означает, что в круге $\overline{D_*}$ ряд (4.3) имеет суммируемую мажоранту. Следовательно, ряд (4.3) равномерно сходится в круге $\overline{D_*}$. Отсюда и из теоремы 3.27 (теорема Вейерштрасса) получим, что сумма ряда (4.3) является регулярной функцией в круге D_*. Учитывая, что R_* произвольное число из интервала $(0, R)$, получим, что сумма ряда (4.3) является регулярной функцией во всем круге его сходимости $|z - z_0| < R$. □

Теорема 4.7 (Почленное дифференцирование степенного ряда)**.** *Пусть* $R > 0$ – *радиус сходимости степенного ряда* (4.3). *Тогда*

(1) *в круге сходимости* $|z - z_0| < R$ *ряд* (4.3) *можно дифференцировать почленно*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}; \tag{4.4}$$

(2) *радиус сходимости ряда* (4.4) *равен* R.

Доказательство. Следует из теорем 3.27 (теорема Вейерштрасса) и 4.6. □

Теорема 4.8 (Ряд Тейлора степенного ряда)**.** *Любой степенной ряд в (непустом) круге его сходимости является рядом Тейлора своей суммы.*

Доказательство. Обозначим сумму степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ в круге его сходимости через $f(z)$. Легко видеть, что $f(z_0) = c_0$. Далее, из теоремы 4.7 следует, что

$$\forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, z \in D \quad f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-p)!} (z - z_0)^{n-p}. \tag{4.5}$$

Подставляя $z = z_0$ в равенстве (4.5) получим, что

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad c_p = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}. \ \square$$

Определение 4.9 (Аналитическая функция). *Функция f называется аналитической в области D, если для любой точки $z_0 \in D$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция f в круге $|z - z_0| < \varepsilon$ представима в виде сходящегося степенного ряда вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.*

Теорема 4.10 (Эквивалентность регулярности и аналитичности функции). *Пусть функция f задана в области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда*

$$f \in \mathcal{H}(D) \iff f \text{ – аналитическая функция в } D.$$

Доказательство. Необходимость ($\Longrightarrow$). Следует из теоремы 4.1.

Достаточность ($\Longleftarrow$). Следует из теоремы 4.6.

4.3. Теорема единственности.

Теорема 4.11 (Теорема об изолированности нулей регулярной функции). *Пусть*

- *D – область в $\mathbb{C}$;*
- *$f \in \mathcal{H}(D)$;*
- *$f(z_0) = 0$, где $z_0 \in D$.*

Тогда выполняется одно из двух следующих условий.

(1) *Существует окрестность точки z_0 такая, что f тождественно равна нулю в этой окрестности.*

(2) *Существует окрестность точки z_0 такая, что z_0 – единственный корень функции f в этой окрестности.*

Доказательство. Из теоремы 4.10 следует, что найдется окрестность U точки z_0 такая, что в этой окрестности функция f может быть представлена степенным рядом вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Из условия теоремы следует, что $c_0 = f(z_0) = 0$. В случае если все коэффициенты c_n обращаются в ноль, получится, что f тождественно равна нулю в окрестности U. В противном случае, найдется номер $s \in \mathbb{N}$ такой, что $c_s \neq 0$ и $c_0 = c_1 = \ldots = c_{s-1} = 0$. Следовательно,

$$f(z) = \sum_{n=s}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^s \sum_{n=s}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-s} = (z - z_0)^s \varphi(z),$$

где $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ и $\varphi(0) = c_s \neq 0$. Из непрерывности функции φ в точке z_0 и условия $\varphi(0) \neq 0$ следует, что найдется окрестность $V \subset U$ точки z_0 такая, что $\varphi \neq 0$ в V. Следовательно, в окрестности V функция f не имеет нулей отличных от z_0. $\square$

Определение 4.12 (Порядок нуля регулярной функции). *Пусть функция f регулярна в окрестности точки z_0. Говорят, что z_0 – нуль функции f порядка (кратности) $s \in \mathbb{N}$, если ее разложение в ряд Тейлора с центром в точке z_0 имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=s}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_s \neq 0$.*

Теорема 4.13 (Эквивалентное определение нулей регулярной функции). *Пусть функция f регулярна в окрестности U точки z_0. Тогда верно, что*

z_0 – нуль функции f порядка $s \in \mathbb{N} \iff \exists\, g \in \mathcal{H}(U)\ :\ \forall\, z \in U\ f(z) = (z-z_0)^s g(z)$ и $g(z_0) \neq 0$.

Доказательство. Доказательство (самостоятельно). □

Теорема 4.14 (Теорема единственности)**.** *Пусть*

- *D – область в $\mathbb{C}$;*
- *$f \in \mathcal{H}(D)$, $g \in \mathcal{H}(D)$;*
- *$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность попарно различных точек в D;*
- *$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_* \in D$;*
- *$\forall\, n \in \mathbb{N}\ f(z_n) = g(z_n)$.*

Тогда $f \equiv g$ в области D (т. е. $\forall\, z \in D\ f(z) = g(z)$).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $h = f - g$. Легко видеть, что h – регулярна в окрестности точки z_*, причем

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad h(z_n) = 0. \tag{4.6}$$

Из (4.6) и непрерывности функции h в точке z_* следует, что $h(z_*) = 0$. Следовательно, z_* – неизолированный нуль функции h. Отсюда и из теоремы 4.11 следует, что $h \equiv 0$ в некоторой окрестности точки z_*.

Обозначим теперь через $\mathcal{N}$ семейство внутренних точек множества нулей функции h. Из только что доказанного следует, что множество $\mathcal{N}$ не пусто (так как $z_* \in \mathcal{N}$). Далее возможны две ситуации $\mathcal{N} \neq D$ и $\mathcal{N} = D$.

В случае, если $\mathcal{N} \neq D$ найдется граничная точка z^* множества $\mathcal{N}$ принадлежащая области D. Из определения $\mathcal{N}$ следует, что $h(z^*) = 0$. Вместе с этим, из того, что z^* – граничная точка $\mathcal{N}$ следует, что z^* – неизолированный нуль функции h. Как и ранее отсюда следует, что $h \equiv 0$ в некоторой окрестности точки z^*. Но это противоречит предположению о том, что z^* – граничная точка $\mathcal{N}$. Полученное противоречие означает, что наше предположение $\mathcal{N} \neq D$ ошибочно.

Из условия $\mathcal{N} = D$ получим, что $h \equiv 0$ в D и, следовательно, $f \equiv g$ в области D. □

Пример 4.15. *Функция $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ обращается в ноль на последовательности точек $\{\frac{1}{\pi n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходящейся к точке $z_* = 0$. Данный факт не противоречит теореме единственности, потому что функция f не регулярна в точке $z_* = 0$.*

4.4. **Принцип максимума.**

Теорема 4.16 (Принцип максимума (о связи между значениями функции на границе и внутри области регулярности))**.** *Пусть*

- *D – область в $\mathbb{C}$ и γ – кусочно-гладкая граница области D;*
- *$f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$.*

Тогда

$$\forall\, z \in \overline{D} \quad |f(z)| \leqslant \max_{\zeta\in\gamma} |f(\zeta)|.$$

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $f^n \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$. Отсюда и из теоремы 3.9 получим, что

$$f^n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f^n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где z – произвольная фиксированная точка в области D. Следовательно,

$$|f^n(z)| \leqslant \max_{\zeta\in\gamma} |f^n(\zeta)| \frac{1}{2\pi} \oint\limits_\gamma \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\zeta,$$

$$|f(z)| \leqslant \max_{\zeta\in\gamma} |f(\zeta)| \left(\frac{1}{2\pi} \oint\limits_\gamma \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\zeta \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.7}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в оценке (4.7) получим, что

$$\forall\ z \in D \quad |f(z)| \leqslant \max_{\zeta\in\gamma} |f(\zeta)|. \tag{4.8}$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что на границе γ области D оценка (4.8) выполняется автоматически. □

Лемма 4.17. *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*;*
- *функция* $|f|$ *постоянна в области* D*.*

Тогда функция f *постоянна в области* D*.*

Идея доказательства. Если $|f| \equiv 0$ в D, то, очевидно, что и $f \equiv 0$ в D. Предположим теперь, что $|f| \equiv M > 0$ в D. В этом случае в области D корректно определена функция $F(z) = \ln f(z)$, причем $F \in \mathcal{H}(D)$.

Заметим, что

$$\forall\ z \in D \quad \operatorname{Re} F(z) = \ln |f(z)| = \ln M.$$

Другими словами, вещественная часть функции F постоянна в области D. Отсюда и из условий Коши-Римана получим, что мнимая часть функции F также постоянна в области D. Учитывая очевидное соотношение $f(z) = e^{F(z)}$ получим, что f постоянна в области D. □

Теорема 4.18 (Принцип максимума (о локальном максимуме регулярной функции))**.** *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*;*
- f *имеет локальный максимум в точке* $z_0 \in D$*.*

Тогда функция f *постоянна в области* D*.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что найдется открытый круг U с центром в точке z_0 такой, что

$$\forall\ z \in U \quad |f(z)| \leqslant |f(z_0)|. \tag{4.9}$$

Докажем, что из условия (4.9) следует постоянство функции $|f|$ в круге U. Доказательство проведем от противного. Пусть нашлась точка $z_* \in U$ такая, что $|f(z_*)| < |f(z_0)|$. Обозначим через γ окружность с центром в точке z_0 и радиуса $r = |z_* - z_0|$. Легко видеть, что точка z_* лежит на окружности γ. Из условия $f \in \mathcal{H}(D)$ следует, что функция f непрерывна на γ и, следовательно, найдется дуга γ_1 окружности γ такая, что $|f(z)| < |f(z_0)|$ при $z \in \gamma_1$. Отсюда и

из теоремы 3.13 (интегральная формула Коши) получим, что

$$|f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|}\,dl = \frac{1}{2\pi r}\left(\oint\limits_{\gamma_1}|f(\zeta)|\,dl + \oint\limits_{\gamma\setminus\gamma_1}|f(\zeta)|\,dl\right) <$$

$$< \frac{|f(z_0)|}{2\pi r}\left(\oint\limits_{\gamma_1} dl + \oint\limits_{\gamma\setminus\gamma_1} dl\right) = \frac{|f(z_0)|}{2\pi r}\oint\limits_{\gamma} dl = |f(z_0)|.$$

Полученное противоречие доказывает, что функция $|f|$ постоянна в круге U.

Из постоянства функции $|f|$ в круге U и леммы 4.17 следует, что функция f постоянна в круге U. Отсюда из теоремы 4.14 (теорема единственности) следует, что f постоянна во всей области D. $\square$

Теорема 4.19 (Лемма Шварца)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| < 1\}$, $\partial D = \{z \mid |z| = 1\}$;
- $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$;
- $f(0) = 0$;
- $\forall\ z \in \partial D \quad |f(z)| \leqslant 1$

Тогда

(1) $\forall\ z \in \overline{D} \quad |f(z)| \leqslant |z|$;

(2) *если найдется* $z_* \in D \setminus \{0\}$ *такая, что* $|f(z_*)| = |z_*|$, *то*

$$\exists\ \alpha \in \mathbb{R}\ :\ \forall\ z \in \overline{D} \quad f(z) = e^{i\alpha}z.$$

Доказательство. (1) Рассмотрим функцию

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{при } 0 < |z| \leqslant 1, \\ f'(z) & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция F допускает разложение в ряд Тейлора вида

$$\forall\ z \in D \quad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}z^{n}.$$

Отсюда и из теоремы 4.6 следует, что $F \in \mathcal{H}(D)$. Из условия $f \in C(\overline{D})$ получим, что $F \in C(\overline{D})$.

Пусть γ – граница области D. Из теоремы 4.16 (принцип максимума) следует, что

$$\forall\ z \in D \quad |F(z)| \leqslant \max_{z\in\gamma}|F(z)| = \max_{z\in\gamma}\frac{|f(z)|}{|z|} = \max_{z\in\gamma}|f(z)| \leqslant 1.$$

Отсюда, с учетом определения функции F, следует первое утверждение теоремы.

(2) Пусть нашлась точка $z_* \in D \setminus \{0\}$ такая, что $|f(z_*)| = |z_*|$. В этом случае $|F(z_*)| = 1$ и функция F достигает своего максимума во внутренней точке области D (напомним, что $|F(z)| \leqslant 1$ в области D). Отсюда и из теоремы 4.18 (принцип максимума) получим, что

$$\exists\ C \in \mathbb{C}\ :\ \forall\ z \in D \quad F(z) = C,$$

и, следовательно, $f(z) = Cz$ в области D. Таким образом, учитывая, что $|f(z_*)| = |z_*|$, получим

$$|f(z_*)| = |C||z_*| \implies |C| = 1 \implies \exists\ \alpha \in \mathbb{R}\ :\ C = e^{i\alpha}.\ \square$$

5. Изолированные особые точки

5.1. Ряды Лорана.

Теорема 5.1 (Теорема о разложении регулярной функции в ряд Лорана). *Пусть*

- $0 \leqslant r < \rho < R \leqslant \infty$;
- $D = \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$, *где* $z_0 \in \mathbb{C}$;
- $f \in \mathcal{H}(D)$.

Тогда

$$\forall\ z \in D \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{5.1}$$

где

$$\forall\ n \in \mathbb{Z} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad \gamma = \{z \mid |z - z_0| = \rho\}\,.$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку z_* в области D. Легко видеть, что найдутся r_* и R_* такие, что

$$r < r_* < |z_* - z_0| < R_* < R.$$

Из теоремы 3.17 следует, что

$$f(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_*}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{r_*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_*}\, d\zeta, \tag{5.2}$$

где контуры $\gamma_{r_*} = \{z \mid |z - z_0| = r_*\}$ и $\gamma_{R_*} = \{z \mid |z - z_0| = R_*\}$ ориентированы против хода часовой стрелки.

Заметим, что для любого $\zeta \in \gamma_{R_*}$ верно, что

$$\frac{1}{\zeta - z_*} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z_* - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_* - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_* - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{5.3}$$

При этом ряд, стоящий в правой части равенства (5.3), сходится равномерно по ζ на окружности γ_{R_*}. Отсюда и из теоремы 3.20 получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_*}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{R_*}} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_* - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z_* - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Наконец, из теоремы 3.9 следует, что

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta,$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{R_*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_*}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z_* - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{5.4}$$

Аналогично, для любого $\zeta \in \gamma_{r_*}$ верно, что

$$\frac{1}{\zeta - z_*} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z_* - z_0)} = -\frac{1}{z_* - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z_* - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z_* - z_0)^{n+1}} = \Big[n = -p - 1\Big] =$$

$$= -\sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{(z_* - z_0)^p}{(\zeta - z_0)^{p+1}} = \Big[p = n\Big] = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z_* - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{5.5}$$

При этом ряд, стоящий в правой части равенства (5.5), сходится равномерно по ζ на окружности γ_{r_*}. Отсюда и из теорем 3.20 и 3.9 получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{r_*}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_*}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{r_*}} f(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z_* - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (z_* - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{r_*}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (z_* - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{5.6}$$

Для завершения доказательства подставим разложения (5.4) и (5.6) в формулу (5.2). □

Определение 5.2 (Ряд Лорана). *Ряд* (5.1) *называют рядом Лорана функции f в области D с центром в точке z_0.*

Теорема 5.3 (Теорема о характере сходимости ряда Лорана). *Пусть*

- *задан ряда Лорана*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \tag{5.7}$$

- $$r = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}, \quad R = \left(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}.$$

Тогда

(1) *ряд* (5.7) *абсолютно сходится при $r < |z - z_0| < R$;*
(2) *ряд* (5.7) *расходится при $|z - z_0| < r$;*
(3) *ряд* (5.7) *расходится при $|z - z_0| > R$;*
(4) *если $r < R$, то ряд* (5.7) *равномерно сходится в любом кольце вида $r_* \leqslant |z - z_0| \leqslant R_*$, где $r < r_* < R_* < R$;*
(5) *сумма ряда* (5.7) *является регулярной функцией в кольце $r < |z - z_0| < R$;*
(6) *в кольце $r < |z - z_0| < R$ ряд* (5.7) *можно дифференцировать почленно.*

Доказательство. Следует из разложения вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n$$

и теорем 4.4, 4.6 и 4.7 для рядов Тейлора. □

Теорема 5.4 (Единственность разложения регулярной функции в ряд Лорана). *Пусть*

- $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$;
- $D = \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$, *где* $z_0 \in \mathbb{C}$;
- $f \in \mathcal{H}(D)$.

Тогда разложение функции f в ряд Лорана единственно.

Доказательство. Пусть функция f может быть разложена в два ряда вида

$$\forall\, z \in D \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n. \tag{5.8}$$

Выберем некоторое ρ из интервала (r, R). Из теоремы 5.3 следует, что ряды (5.8) сходятся равномерно на окружности $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = \rho\}$. Из теоремы 3.20) следует, что эти ряды можно почленно интегрировать по контуру γ. Следовательно, для любого $p \in \mathbb{Z}$ верно, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-p-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^{n-p-1}\, dz,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} (z - z_0)^{n-p-1}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} (z - z_0)^{n-p-1}\, dz.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} (z - z_0)^{n-p-1}\, dz = \begin{cases} 1 & \text{при } n = p, \\ 0 & \text{при } n \neq p, \end{cases}$$

получим

$$\forall\, p \in \mathbb{Z} \quad c_p = d_p. \ \square$$

5.2. **Изолированные особые точки.**

Определение 5.5 (Изолированная особая точка)**.**

- *Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется изолированной особой точкой функции f, если найдется $R > 0$ такое, что f регулярна в области $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ и не дифференцируема в точке z_0.*
- *Точка $z_0 = \infty$ называется изолированной особой точкой функции f, если найдется $r < +\infty$ такое, что f регулярна в области $\{z \mid r < |z| < +\infty\}$.*

Определение 5.6 (Типы изолированных особых точек)**.** *Изолированную особую точку $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ функции f называют*

- *устранимой особой точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$;*
- *полюсом, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;*
- *существенно особой точкой, если предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.*

Определение 5.7 (Регулярная и главная части ряда Лорана в окрестности конечной изолированной особой точки)**.** *Пусть*

- *$z_0 \in \mathbb{C}$ – изолированная особая точка функции f (т. е. функция f регулярна в области $D = \{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$, где $R > 0$);*
- *ряд Лорана функции f в области D с центром в точке z_0 имеет вид $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.*

Тогда

(1) *ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называют рядом Лорана функции f в окрестности z_0;*

(2) *ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называют регулярной частью ряда Лорана;*

(3) *ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ *называют главной частью ряда Лорана.*

Определение 5.8 (Регулярная и главная части ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной изолированной особой точки)**.** *Пусть*

- $z_0=\infty$ *– изолированная особая точка функции* f *(т. е. функция* f *регулярна в области* $D=\{z\mid r<|z|<+\infty\}$*, где* $r<+\infty$*);*
- *ряд Лорана функции* f *в области* D *имеет вид* $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_nz^n$.

Тогда

(1) *ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_nz^n$ *называют рядом Лорана функции* f *в окрестности бесконечности;*

(2) *ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_nz^n$ *называют регулярной частью ряда Лорана в окрестности бесконечности;*

(3) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_nz^n$ *называют главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечности.*

Теорема 5.9 (Устранимая особая точка (необходимое и достаточное условие))**.** *Пусть* $z_0\in\overline{\mathbb{C}}$ *– изолированная особая точка функции* f.

Тогда для того, чтобы z_0 *была устранимой особой точкой функции* f *необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции* f *в окрестности точки* z_0 *не содержала нетривиальных членов.*

Доказательство. Доказательство проведем для случая $z_0\neq\infty$. Случай $z_0=\infty$ сводится к рассматриваемому с помощью замены переменной $z=\frac{1}{t}$.

Необходимость ($\Longrightarrow$). Из условия теоремы следует, что функция f регулярна в области $D=\{z\mid 0<|z-z_0|<r\}$, где r – некоторое положительное число. Из теоремы 5.1 следует, что

$$\forall\, n\in\mathbb{Z}\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta,\quad \gamma=\{z\mid |z-z_0|=\rho\}\,, \tag{5.9}$$

где ρ – произвольное число из промежутка $(0,r)$.

Так как z_0 – устранимая особая точка функции f, то из свойств пределов следует, что функция f остается ограниченной в некоторой окрестности точки z_0. Чтобы не вводить новые обозначения будем считать, что f ограничена в области D постоянной $M>0$. Отсюда и из (5.9) следует, что

$$\forall\, n\in\mathbb{Z}\quad |c_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{n+1}}\,dl\leqslant\frac{\max\limits_{\zeta\in\gamma}|f(\zeta)|}{2\pi\rho^{n+1}}\oint\limits_{\gamma}d\zeta\leqslant\frac{M}{\rho^n}. \tag{5.10}$$

Заметим теперь, что c_n не зависит от выбора ρ. Следовательно, переходя к пределу при $\rho\to 0$ в неравенстве (5.10), получим, что $c_n=0$ при $n=-1,-2,\ldots$.

Достаточность ($\Longleftarrow$). Рассмотрим случай $z_0\neq\infty$. Из условия теоремы следует, что ряд Лорана функции f является рядом Тейлора. Из теоремы 4.6 следует, что ряд Тейлора регулярен в точке z_0 и, следовательно существует предел конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. $\square$

Теорема 5.10 (Полюс (необходимое и достаточное условие)). *Пусть $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – изолированная особая точка функции f.*

Тогда для того, чтобы z_0 была полюсом функции f необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции f в окрестности точки z_0 содержала конечное число нетривиальных членов.

Доказательство. Доказательство проведем для случая $z_0 \neq \infty$. Случай $z_0 = \infty$ сводится к рассматриваемому с помощью замены переменной $z = \frac{1}{t}$.

Необходимость ($\Longrightarrow$). Так как z_0 – полюс функции f, то найдется проколотая окрестность U точки z_0 такая, что $f \in \mathcal{H}(U)$ и

$$\forall\, z \in U \quad |f(z)| > 1. \tag{5.11}$$

Отсюда следует, что функция $h = \frac{1}{f}$ регулярна в U, причем

$$\lim_{z \to z_0} h(z) = 0. \tag{5.12}$$

Следовательно, z_0 – устранимая особая точка функции h. Отсюда и из теоремы 5.9 следует, что в проколотой окрестности U функция h может быть разложена в ряд

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n (z - z_0)^n.$$

При этом из определения функции h (напомним, что $h = \frac{1}{f}$) вытекает, что она не может быть тождественно равна нулю. Отсюда и из (5.12) следует, что найдется номер $s \in \mathbb{N}$ такой, что

$$h_0 = h_1 = \ldots = h_{s-1} = 0, \quad h_s \neq 0.$$

Перепишем функцию h в виде

$$h(z) = (z - z_0)^s \varphi(z), \quad \varphi(z) = \sum_{n=s}^{\infty} h_n (z - z_0)^{n-s}.$$

Легко видеть, что $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$. Следовательно, $\frac{1}{\varphi} \in \mathcal{H}(U)$ и функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ может быть разложена в ряд вида

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Собирая полученные результаты вместе, получим, что в проколотой окрестности U точки z_0 верно, что

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = (z - z_0)^{-s} \frac{1}{\varphi(z)} = (z - z_0)^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-s}^{\infty} c_{n+s} (z - z_0)^n.$$

Достаточность ($\Longleftarrow$). Пусть ряд Лорана функции f в окрестности U точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-s}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $s \in \mathbb{N}$ и $c_{-s} \neq 0$. Тогда

$$f(z) = (z - z_0)^{-s} \varphi(z), \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-s} (z - z_0)^n.$$

Легко видеть, что $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ и $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = c_{-s} \neq 0$. Следовательно,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = c_{-s} \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{-s} = \infty. \ \square$$

Определение 5.11 (Порядок полюса в $\mathbb{C}$). *Пусть*

- $z_0 \in \mathbb{C}$ *полюс функции* f*;*
- *ряд Лорана функции* f *в окрестности точки* z_0 *имеет вид* $\sum\limits_{n=-p}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$*, где* $p>0$ *и* $c_{-p} \neq 0$.

Тогда говорят, что функция f *имеет в точке* z_0 *полюс порядка* p.

Определение 5.12 (Порядок полюса в бесконечности). *Пусть*

- $z_0 = \infty$ *полюс функции* f*;*
- *ряд Лорана функции* f *в окрестности бесконечности имеет вид* $\sum\limits_{n=-\infty}^{p} c_n z^n$*, где* $p>0$ *и* $c_p \neq 0$.

Тогда говорят, что функция f *имеет в бесконечности полюс порядка* p.

Теорема 5.13 (Существенно особая точка (необходимое и достаточное условие)). *Пусть* $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ *– изолированная особая точка функции* f.

Тогда для того, чтобы z_0 *была существенно особой точкой функции* f *необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции* f *в окрестности точки* z_0 *содержала бесконечное число нетривиальных членов.*

Доказательство. Следует из теорем 5.9 и 5.10. $\square$

Теорема 5.14 (Теорема Пикара). *В любой окрестности существенно особой точки функция принимает все значения из* $\mathbb{C}$ *за исключением, быть может, одного.*

Доказательство. Без доказательство. $\square$

Пример 5.15. *Найти все особые точки функции*

$$f(z) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}}$$

и указать их тип.

Решение. Особые точки функции f располагаются в нулях функции $1-e^{\frac{1}{z}}$, в точках $z=0$ и $z=\infty$. Найдем нули функции $1-e^{\frac{1}{z}}$

$$1-e^{\frac{1}{z}} = 0 \iff e^{\frac{1}{z}} = 1 \iff \frac{1}{z} = 2\pi i n,\ n\in\mathbb{Z} \iff z = \frac{1}{2\pi i n},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим точку $z_n = \frac{1}{2\pi i n}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Разложение функции $1-e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_n имеет вид

$$1-e^{\frac{1}{z}} = \frac{e^{\frac{1}{z_n}}}{z_n^2}(z-z_n) + O((z-z_n)^2) = \frac{1}{z_n^2}(z-z_*) + O((z-z_*)^2).$$

Отсюда находим разложение функции f в ряд Лорана в окрестности точки z_n

$$f(z) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{\frac{1}{z_n^2}(z-z_n) + O((z-z_n)^2)} = \frac{z_n^2}{z-z_n}\frac{1}{1+O(z-z_n)} = \frac{z_n^2}{z-z_n} + O(1).$$

Таким образом, z_n – полюс первого порядка для любого $n \in \mathbb{Z}$.

В любой окрестности точки $z = 0$ находится бесконечное число полюсов z_n функции f. Следовательно, $z = 0$ – не изолированная особая точка.

В окрестности точки $z = \infty$ разложение функции $1 - e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана имеет вид

$$1 - e^{\frac{1}{z}} = 1 - \left(1 + \frac{1}{z} + O(z^{-2})\right) = -\frac{1}{z} + O(z^{-2}).$$

Отсюда находим разложение функции f в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{-\frac{1}{z} + O(z^{-2})} = -z\frac{1}{1 + O(z^{-1})} = -z(1 + O(z^{-1})) = -z + O(1).$$

Таким образом, $z = \infty$ – полюс первого порядка.

Ответ: $z = \frac{1}{2\pi i n}$, $n \in \mathbb{Z}$ – полюсы первого порядка; $z = 0$ – не изолированная особая точка; $z = \infty$ – полюс первого порядка.

6. Теория вычетов

6.1. Вычет в конечной точке.

Определение 6.1 (Вычет в конечной точке). *Пусть*

- $z_0 \in \mathbb{C}$ – *изолированная особая точка функции* f;
- *ряд Лорана функции* f *в окрестности точки* z_0 *имеет вид* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

Тогда вычетом функции f *в точке* z_0 *называют число*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Пример 6.2. *Найти вычет функции* $f(z) = z^{-5}e^z$ *в точке* $z_0 = 0$.

Решение. Найдем разложение функции f в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$. При $|z| > 0$ получим

$$f(z) = z^{-5}e^z = z^{-5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-5} = \ldots + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=0} z^{-5}e^z = \frac{1}{4!}. \square$$

Пример 6.3. *Найти вычет функции* $f(z) = \frac{2}{z^2-2z}$ *в точке* $z_0 = 2$.

Решение. Найдем разложение функции f в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$. При $0 < |z-2| < 2$ получим

$$f(z) = \frac{2}{z^2-2z} = \frac{2}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-2)^n,$$

где c_n – коэффициенты разложения функции z^{-1} в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 2$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=2} \frac{2}{z^2-2z} = 1. \square$$

Теорема 6.4 (Вычисление вычета функции в полюсе 1-го порядка в $\mathbb{C}$). *Пусть*

- *функции* φ *и* ψ *регулярны в окрестности точки* $z_0 \in \mathbb{C}$;
- z_0 – *ноль функции* ψ *первого порядка.*

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Доказательство. Раскладывая функции φ и ψ в окрестности точки z_0 в ряды Тейлора, найдем разложение функции $\frac{\varphi}{\psi}$ в ряд Лорана в окрестности z_0

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0) + O(z-z_0)}{\psi'(z_0)(z-z_0) + O((z-z_0)^2)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)(z-z_0)} \cdot \frac{1}{1+O(z-z_0)} + \frac{O(1)}{\psi'(z_0)+O(z-z_0)} =$$
$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)(z-z_0)} + O(1). \square$$

Пример 6.5. *Найти вычет функции* $f(z) = \frac{z^2}{\sin 2z}$ *в точке* $z_0 = \pi$.

Решение. Применяя теорему 6.4, найдем

$$\operatorname*{res}_{z=\pi} \frac{z^2}{\sin 2z} = \frac{z^2}{(\sin 2z)'}\bigg|_{z=\pi} = \frac{z^2}{2\cos 2z}\bigg|_{z=\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \square$$

Теорема 6.6 (Вычисление вычета функции в полюсе произвольно порядка в $\mathbb{C}$)**.** *Пусть функция f имеет полюс порядка $p > 0$ в точке $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\Big((z-z_0)^p f(z)\Big).$$

Доказательство. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \frac{c_{-p}}{(z-z_0)^p} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + O(1).$$

Следовательно, при $z \to z_0$ верно, что

$$(z-z_0)^p f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+p} = c_{-p} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{p-1} + O((z-z_0)^p),$$

$$\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(z-z_0)^p f(z) = c_{-1}(p-1)! + O((z-z_0)),$$

$$c_{-1} = \frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(z-z_0)^p f(z) + O((z-z_0)). \tag{6.1}$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$ в равенстве (6.1), получим требуемое утверждение. $\square$

Пример 6.7. *Найти вычет функции $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$ в точке $z_0 = 1$.*

Решение. Применяя теорему 6.6, найдем

$$\operatorname*{res}_{z=1} \frac{z^3}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} z^3 = 3z^2\Big|_{z=1} = 3. \square$$

6.2. **Вычет в бесконечно удаленной точке.**

Определение 6.8 (Вычет в бесконечно удаленной точке)**.** *Пусть*

- *$z_0 = \infty$ – изолированная особая точка функции f;*
- *ряд Лорана функции f в окрестности бесконечности имеет вид $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.*

Тогда вычетом функции f в бесконечности называют число

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Пример 6.9. *Найти вычет функции $f(z) = z^{-5}e^z$ в бесконечности.*

Решение. Найдем разложение функции f в ряд Лорана в окрестности бесконечности. При $0 < |z| < \infty$ получим

$$f(z) = z^{-5}e^z = z^{-5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-5} = \ldots + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} z^{-5}e^z = -\frac{1}{4!}. \square$$

Пример 6.10. *Найти вычет функции* $f(z)=\frac{3z+2}{z^2-2z}$ *в бесконечности.*

Решение. Найдем разложение функции f в ряд Лорана в окрестности бесконечности. При $2<|z|<\infty$ получим

$$f(z)=\frac{3z+2}{z^2-2z}=\frac{4}{z-2}-\frac{1}{z}=\frac{4}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}=\frac{4}{z}\left(1+O(z^{-1})\right)-\frac{1}{z}=\frac{3}{z}+O(z^{-2}).$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{3z+2}{z^2-2z}=3.\ \square$$

Теорема 6.11 (Вычисление вычета функции на бесконечности для ограниченной функции)**.** *Пусть* $z=\infty$ *– устранимая особая точка функция* f*. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}z(f(\infty)-f(z)).$$

Доказательство. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}c_nz^n=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)=f(\infty)+\frac{c_{-1}}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Следовательно, при $z\to\infty$ верно, что

$$z(f(z)-f(\infty))=c_{-1}+O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{6.2}$$

Переходя к пределу при $z\to\infty$ в равенстве (6.2), получим требуемое утверждение. $\square$

Пример 6.12. *Найти вычет функции* $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2+2z+5}$ *в точке* $z=\infty$*.*

Решение. Легко видеть, что

$$f(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2+1}{z^2+2z+5}=1.$$

Применяя теорему 6.11, получим

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{z^2+1}{z^2=2z+5}=\lim_{z\to\infty}z\left(1-\frac{z^2+1}{z^2+2z+5}\right)=\lim_{z\to\infty}z\frac{2z+4}{z^2+2z+5}=2.\ \square$$

6.3. **Теорема о вычетах.**

Теорема 6.13 (Выражение вычета функции в конечной точке через контурный интеграл)**.** *Пусть*

- $0<\rho<R$*;*
- $D=\{z\mid 0<|z-z_0|<R\}$*, где* $z_0\in\mathbb{C}$*;*
- γ *– граница круга* $\{z\mid |z-z_0|<\rho\}$ *положительно ориентированная относительно своей внутренности (т. е. против часовой стрелки);*
- $f\in\mathcal{H}(D)$*.*

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(z)\,dz.$$

Доказательство. Следует из теоремы 5.1 и определения 6.1 вычета функции. $\square$

Теорема 6.14 (Выражение вычета функции в бесконечно удаленной точке через контурный интеграл)**.** *Пусть*

- $0 < R < \rho$;
- $D = \{z \mid |z| > R\}$;
- γ – *граница круга* $\{z \mid |z| < \rho\}$ *положительно ориентированная относительно внешности круга* $\{z \mid |z| < \rho\}$ *(т. е. по часовой стрелке);*
- $f \in \mathcal{H}(D)$.

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Доказательство. Следует из теоремы 5.1 и определения 6.8 вычета функции в бесконечно удаленной точки. □

Теорема 6.15 (Теорема о вычетах)**.** *Пусть*

- D – *ограниченная односвязная область в* $\mathbb{C}$;
- $E = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset D$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $f \in \mathcal{H}(D \setminus E) \cap C(\overline{D} \setminus E)$;
- *граница* γ *области* D *является положительно ориентированной кусочно-гладкой замкнутой кривой.*

Тогда

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство. Пусть ρ – малое положительное число такое, что круги $D_k = \{z \mid |z - z_k| < \rho\}$ попарно не пересекаются и лежат в области D при $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть, вместе с этим, γ_k – граница круга D_k положительно ориентированная относительно D_k при $k = 1, 2, \ldots, n$. Заметим теперь, что f регулярна в в области $D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k$ и из теоремы 3.7 следует, что

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz - \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\, dz = 0. \tag{6.3}$$

Из (6.3) и теоремы 6.13 получим, что

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \ \square$$

Пример 6.16. *Вычислить интеграл*

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 4z + 3}\, dz.$$

Замечание 6.17. *Здесь и далее мы по умолчанию будем считать, что контур интегрирования положительно ориентирован относительно своей внутренности.*

Решение. Внутри контура интегрирования находится одна особая точка $z = 1$ (полюс первого порядка). Отсюда и из теоремы 6.15 следует, что

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-4z+3}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1} \frac{e^z}{z^2-4z+3} = 2\pi i \frac{e^z}{(z^2-4z+3)'}\bigg|_{z=1} = -\pi e i.$$

Теорема 6.18 (Теорема о сумме вычетов)**.** *Пусть*

- $E = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E)$.

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Доказательство. Пусть $R > 0$ такое, что $E \subset \{z \mid |z| < R\}$, γ_+ – окружность $\{z \mid |z| = R\}$, ориентированная против часовой стрелки, γ_- – окружность $\{z \mid |z| = R\}$, ориентированная по часовой стрелке. Из теорем 6.14 и 6.15 следует, что

$$0 = \oint\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz + \oint\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \ \square$$

Пример 6.19. *Вычислить интеграл*

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z^9-1)(z-3)}\,dz.$$

Решение. Отсюда и из теорем 6.15 и 6.18 следует, что

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z^9-1)(z-3)}\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=3} \frac{1}{(z^9-1)(z-3)} - 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{(z^9-1)(z-3)} = -\frac{2\pi i}{3^9-1}. \ \square$$

6.4. **Сведения, полезные для вычисления интегралов по вычетам.**

Теорема 6.20 (Оценка интеграла по полуокружности бесконечно большого радиуса)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R\}$, *где* $R > 0$;
- $f \in C(D)$;
- $\gamma_\rho = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| = \rho\}$, *где* $\rho > R$;
- $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \max\limits_{z\in\gamma_\rho} |z||f(z)| = 0$.

Тогда

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. При $\rho \geqslant R$ справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma_\rho} |f(z)|\,|dz| \leqslant \max_{z\in\gamma_\rho} |z||f(z)| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{1}{|z|}\,|dz| = \pi \max_{z\in\gamma_\rho} |z||f(z)|. \tag{6.4}$$

Переходя к пределу при $\rho \to +\infty$ в оценке (6.4), получим требуемое утверждение. $\square$

Теорема 6.21 (Оценка интеграла по полуокружности бесконечно малого радиуса)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, 0 < |z| \leqslant R\}$, *где* $R > 0$;
- $f \in C(D)$;
- $\gamma_\rho = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| = \rho\}$, *где* $0 < \rho < R$;
- $\lim\limits_{\rho \to +0} \max\limits_{z \in \gamma_\rho} |z||f(z)| = 0$.

Тогда

$$\lim_{\rho \to +0} \int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. При $\rho \leqslant R$ справедлива оценка (6.4). Переходя к пределу при $\rho \to +0$ в оценке (6.4), получим требуемое утверждение. □

Теорема 6.22 (Лемма Жордана)**.** *Пусть*

- $\alpha > 0$;
- $D = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R\}$, *где* $R > 0$;
- $f \in C(D)$;
- $\gamma_\rho = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| = \rho\}$, *где* $\rho > R$;
- $\lim\limits_{\rho \to +\infty} \max\limits_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = 0$.

Тогда

$$\lim_{\rho \to +\infty} \int\limits_{\gamma_\rho} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0.$$

Доказательство. Заметим, что при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ справедлива оценка $\sin\varphi > \frac{2}{\pi}\varphi$. Далее, полагая $M_\rho = \max\limits_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|$ получим, что

$$\left| \int\limits_{\gamma_\rho} f(z) e^{i\alpha z}\, dz \right| \leqslant M_\rho \int\limits_{\gamma_\rho} |e^{i\alpha z}|\, |dz| = [z = \rho e^{i\varphi}] = M_\rho \rho \int\limits_0^\pi e^{-\alpha\rho\sin\varphi}\, d\varphi = 2M_\rho\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\rho\sin\varphi}\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2M_\rho\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha}{\pi}\rho\varphi}\, d\varphi = -2M_\rho \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\frac{2\alpha}{\pi}\rho\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{M_\rho\pi}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha\rho}\right) \leqslant \frac{M_\rho\pi}{\alpha}.$$

Переходя в последней оценке к пределу при $\rho \to +\infty$, получим требуемое утверждение. □

6.5. **Вычисление интегралов от тригонометрических функций по периоду.**

Теорема 6.23 (Вычисление интеграла от тригонометрической функции по периоду)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| < 1\}$;
- $E = \{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset D$, *где* $z_0 = 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$;
- $F \in \mathcal{H}(D \setminus E) \cap C(\overline{D} \setminus E)$.

Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} F(e^{i\varphi})\, d\varphi = 2\pi \sum_{k=0}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{F(z)}{z}.$$

Доказательство. Выполняя замену переменных, и, затем, используя теорему 6.15 о вычетах, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} F(e^{i\varphi})\,d\varphi = \Big[z = e^{i\varphi},\ dz = iz d\varphi\Big] = \oint\limits_{|z|=1} F(z)\frac{dz}{iz} = 2\pi \sum_{k=0}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{F(z)}{z}. \ \square$$

Пример 6.24. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+e^{i\varphi}}\,d\varphi.$$

Решение.

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+e^{i\varphi}}\,d\varphi = [z = e^{i\varphi}] = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{2+z}\,\frac{dz}{iz} = 2\pi \operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{(2+z)z} = \pi. \ \square$$

Пример 6.25. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

где $a > 0$ *и* $b > 0$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию с помощью формул Эйлера

$$\frac{1}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = \frac{4}{-a^2(e^{2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi}) + b^2(e^{2i\varphi} + 2 + e^{-2i\varphi})} = \\ = \frac{4e^{2i\varphi}}{(b^2-a^2)e^{4i\varphi} + 2(a^2+b^2)e^{2i\varphi} + (b^2-a^2)}.$$

Далее, заметим, что замена переменных $z = e^{2i\varphi}$ здесь более удобна. Отсюда

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \Big[z = e^{2i\varphi},\ dz = 2iz\,d\varphi\Big] = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1} \frac{4z}{(b^2-a^2)z^2 + 2(a^2+b^2)z + (b^2-a^2)}\,\frac{dz}{2iz} = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(b^2-a^2)z^2 + 2(a^2+b^2)z + (b^2-a^2)}.$$

Найдем корни полинома $p(z) = (b^2-a^2)z^2 + 2(a^2+b^2)z + (b^2-a^2)$

$$z_\pm = \frac{-(a^2+b^2) \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2 - (b^2-a^2)^2}}{b^2-a^2} = \frac{-a^2 \pm 2ab - b^2}{2(a^2+b^2)} = -\frac{(a \mp b)^2}{b^2-a^2},$$

$$z_+ = \frac{a-b}{a+b}, \quad z_- = \frac{a+b}{a-b}.$$

Легко видеть, что $0 \leqslant |z_+| < 1 < |z_-| \leqslant \infty$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{p(z)} = 2\pi \operatorname*{res}_{z=z_+} \frac{1}{p(z)} = \frac{2\pi}{p'(z_+)} = \frac{\pi}{2ab}. \ \square$$

6.6. **Вычисление интегралов от рациональных функций по вещественной оси.**

Теорема 6.26 (Вычисление интегралов от рациональных функций по вещественной оси)**.** *Пусть*

- R *– рациональная функция;*
- $R(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ *при* $z \to \infty$*;*
- *особые точки* R *не лежат на вещественной оси;*
- $E_+ = \{z_1^+, z_2^+, \dots, z_n^+\}$ *– множество особых точек функции* R *в верхней полуплоскости, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $E_- = \{z_1^-, z_2^-, \dots, z_m^-\}$ *– множество особых точек функции* R *в нижней полуплоскости, где* $m \in \mathbb{N}$*;*
- $\rho > 0$ *такое, что* $E_+ \cup E_- \subset \{z \mid |z| < \rho\}$*;*
- γ_+ *– положительно ориентированная граница полукруга* $\{z \mid |z| < \rho,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$*, см. рисунок* 3*;*
- γ_- *– отрицательно ориентированная граница полукруга* $\{z \mid |z| < \rho,\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$*, см. рисунок* 4*.*

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} R(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_+} R(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_-} R(z)\,dz.$$

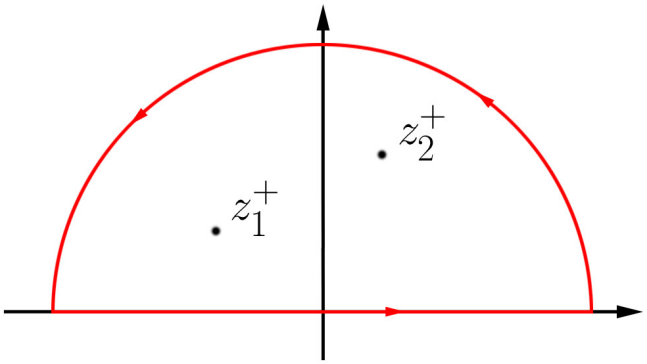

Рис. 3. Контур γ_+ выделен красным цветом.

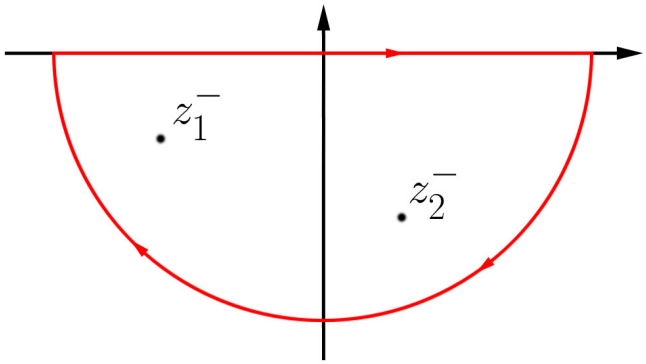

Рис. 4. Контур γ_- выделен красным цветом.

Доказательство. Докажем первое равенство. Доказательство второго проводится аналогично. Пусть γ_r – положительно ориентированная граница полукруга $\{z \mid |z| < r,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, где $r \geqslant \rho$. Из теоремы 6.15 следует, что

$$\int\limits_{\gamma_+} R(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_r} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z).$$

Вместе с этим легко видеть, что

$$\int\limits_{\gamma_r} R(z)\,dz = \int\limits_{-r}^{r} R(x)\,dx + \int\limits_{C_r^+} R(z)\,dz,$$

где C_r^+ – верхняя полуокружность радиуса r. Отсюда и из теоремы 6.20 следует, что

$$\int\limits_{\gamma_+} R(z)\,dz = \lim_{r\to+\infty}\int\limits_{\gamma_r} R(z)\,dz = \lim_{r\to+\infty}\int\limits_{-r}^{r} R(x)\,dx + \lim_{r\to+\infty}\int\limits_{C_r^+} R(z)\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}} R(x)\,dx. \ \square$$

Пример 6.27. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx, \quad a>0.$$

Решение. Замыкая контур интегрирования сверху, из теоремы 6.26 получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int\limits_{\gamma_+} \frac{1}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ia} \frac{1}{z^2+a^2} = 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a},$$

где контур интегрирования γ_+ изображен на рисунке 3. $\square$

Пример 6.28. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-2i)^4(x+i)}\,dx.$$

Решение. Замыкая контур интегрирования снизу, из теоремы 6.26 получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-2i)^4(x+i)}\,dx = \int\limits_{\gamma_-} \frac{1}{(z-2i)^4(z+i)}\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=-i} \frac{1}{(z-2i)^4(z+i)} = -\frac{2\pi i}{81},$$

где контур интегрирования γ_- изображен на рисунке 4.

Отметим, что контур интегрирования γ_- обходится против хода часовой стрелки, поэтому в при вычислении интеграла по вычетам возникает знак минус. Кроме того, контур интегрирования можно было замыкать сверху и вычислять интеграл по γ_+, однако в этом случае пришлось бы вычислять вычет в полюсе четвертого порядка. $\square$

Пример 6.29. *Пусть f – ограниченная регулярная функция в верхней полуплоскости. Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx.$$

Решение. По аналогии с доказательством теоремы 6.26 можно получить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2+1}\,dx = \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{f(z)}{z^2+1} = \pi f(i),$$

где контур интегрирования γ_+ изображен на рисунке 3.

Отметим, что в данном примере замыкать контур интегрирования снизу нельзя, потому что подынтегральная функция не определена в нижней полуплоскости. $\square$

6.7. **Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, по вещественной оси.**

Теорема 6.30 (Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, по вещественной оси)**.** *Пусть*

- R *– рациональная функция;*
- $R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ *при* $z \to \infty$*;*
- *особые точки* R *не лежат на вещественной оси;*
- $E_+ = \{z_1^+, z_2^+, \dots, z_n^+\}$ *– множество особых точек функции* R *в верхней полуплоскости, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $E_- = \{z_1^-, z_2^-, \dots, z_m^-\}$ *– множество особых точек функции* R *в нижней полуплоскости, где* $m \in \mathbb{N}$*;*
- $\rho > 0$ *такое, что* $E_+ \cup E_- \subset \{z \mid |z| < \rho\}$*;*
- γ_+ *– положительно ориентированная граница полукруга* $\{z \mid |z| < \rho,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$*;*
- γ_- *– отрицательно ориентированная граница полукруга* $\{z \mid |z| < \rho,\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$*;*
- $\alpha > 0$.

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} R(x)e^{i\alpha x}\,dx = \int\limits_{\gamma_+} R(z)e^{i\alpha z}\,dz, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} R(x)e^{-i\alpha x}\,dx = \int\limits_{\gamma_-} R(z)e^{-i\alpha z}\,dz.$$

Замечание 6.31. *Заметим, что функция* $e^{i\alpha z}$ *убывает при* $z \to +i\infty$ *(верхняя полуплоскость), в то время как функция* $e^{-i\alpha z}$ *убывает при* $z \to -i\infty$ *(нижняя полуплоскость).*

Грубо говоря, контур интегрирования нужно замыкать в той полуплоскости, в которой убывает показательная функция.

Доказательство. Докажем первое равенство. Доказательство второго проводится аналогично. Пусть γ_r – положительно ориентированная граница полукруга $\{z \mid |z| < r,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, где $r \geqslant \rho$. Из теоремы 6.15 следует, что

$$\int\limits_{\gamma_+} R(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int\limits_{\gamma_r} R(z)e^{i\alpha z}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z)e^{i\alpha z}.$$

Вместе с этим легко видеть, что

$$\int\limits_{\gamma_r} R(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int\limits_{-r}^{r} R(x)e^{i\alpha x}\,dx + \int\limits_{C_r^+} R(z)e^{i\alpha z}\,dz,$$

где C_r^+ – верхняя полуокружность радиуса r. Отсюда и из теоремы 6.22 (лемма Жордана) следует, что

$$\int\limits_{\gamma_+} R(z)e^{i\alpha z}\,dz = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\gamma_r} R(z)e^{i\alpha z}\,dz = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{-r}^{r} R(x)e^{i\alpha x}\,dx + \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{C_r^+} R(z)e^{i\alpha z}\,dz =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} R(x)e^{i\alpha x}\,dx. \ \square$$

Пример 6.32. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx, \quad a>0.$$

Решение. Из теоремы 6.30 получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \operatorname{Re}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx\right) = \operatorname{Re}\left(\int\limits_{\gamma_+} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dx\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname*{res}_{z=ia} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right) =$$
$$= \operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{e^{-a}}{2ia}\right) = \frac{\pi}{ae^a},$$

где контур интегрирования γ_+ изображен на рисунке 3. □

Пример 6.33. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^2+ix+2}\,dx.$$

Решение. Из теоремы 6.30 получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^2+ix+2}\,dx = \frac{1}{2i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+ix+2}\,dx - \frac{1}{2i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{x^2+ix+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_+} \frac{e^{iz}}{z^2+iz+2}\,dz - \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_-} \frac{e^{-iz}}{z^2+iz+2}\,dz = \pi \operatorname*{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+iz+2} - \pi \operatorname*{res}_{z=-2i} \frac{e^{-iz}}{z^2+iz+2} =$$
$$= \pi\frac{e^{-1}}{3i} - \pi\frac{e^{-2}}{-3i} = -\frac{\pi i}{3}(e^{-1}+e^{-2}),$$

где контуры интегрирования γ_+ и γ_- изображены на рисунках 3 и 4 соответственно. □

6.8. **Вычисление интегралов, содержащих устранимые особенности на контуре интегрирования.**

Пример 6.34. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{6.5}$$

Решение. Проверим, что подынтегральная функция имеет устранимую особую точку в окрестности нуля

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z+O(z^3)}{z} = 1+O(z^2).$$

Таким образом, интеграл (6.5) корректно определен.

Поскольку подынтегральная функция содержит тригонометрическую функцию $\sin x$, то для вычисления интеграла (6.5) нам так или иначе необходимо будет воспользоваться теоремой 6.22 (лемма Жордана). В свою очередь, для того чтобы воспользоваться леммой Жордана нам необходимо разбить интеграл (6.5) в сумму так, чтобы разнести экспоненты e^{ix} и e^{-ix}, содержащиеся в синусе, по разным интегралам. Прямолинейный способ разбиения интеграла (6.5) в сумму

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,dx \stackrel{?}{=} \frac{1}{2i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \frac{1}{2i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx \tag{6.6}$$

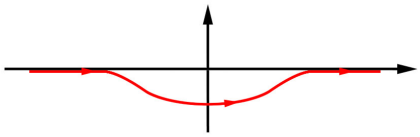

Рис. 5. Контур γ выделен красным цветом.

немедленно приводит к ошибке, поскольку каждый из интегралов, стоящих в правой части (6.6), содержит не интегрируемую особенность в нуле.

Обойти указанную трудность можно следующим образом. Функция $\frac{\sin z}{z}$ регулярна во всей комплексной плоскости, в том числе и в окрестности нуля. Продеформируем контур интегрирования в окрестности нуля вниз, см. рисунок 5. При такой деформации контура, в силу теоремы Коши 3.6, значение интеграла (6.5) не изменится. Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_{\gamma} \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_+} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \frac{1}{2i}\int\limits_{\gamma_-} \frac{e^{-iz}}{z}\,dz = \pi \operatorname*{res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} - 0 = \pi,$$

где контуры интегрирования γ_+ и γ_- изображены на рисунках 6 и 7.

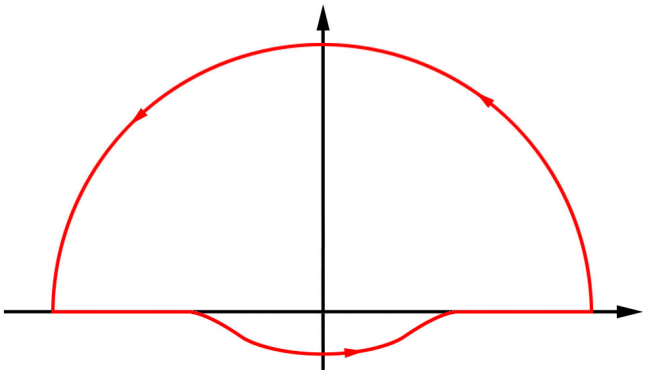

Рис. 6. Контур γ_+ выделен красным цветом.

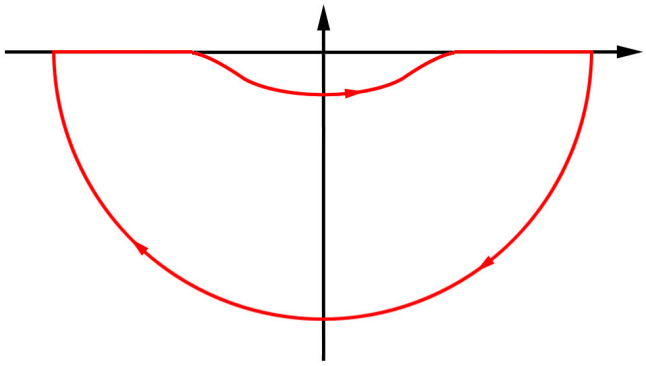

Рис. 7. Контур γ_- выделен красным цветом.

Отдельно отметим, что при вычислении интеграла $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z}\,dz$ согласно теореме 6.30 мы замкнули контур интегрирования снизу (нельзя сверху) и интеграла $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$ согласно теореме 6.30 – сверху (нельзя снизу). □

6.9. **Интеграл в смысле главного значения.**

Определение **6.35** (Интеграл в смысле главного значения (в окрестности конечной особой точки)). *Пусть*

- $-\infty < a < c < b < +\infty$;
- $f \in C[a,c) \cap C(c,b]$.

Интегралом в смысле главного значения от функции f по отрезку $[a,b]$ называют величину

$$v.p.\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right), \tag{6.7}$$

если предел в правой части (6.7) *существует.*

Теорема 6.36 (Вычисление интегралов в смысле главного значения (в окрестности конечной особой точки)). *Пусть*

- $-\infty < a < c < b < +\infty$;
- D – *односвязная область*;
- $[a,b] \subset D$;
- $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{c\})$;
- c – *полюс первого порядка функции* f;
- γ_+ – *гладкий контур в* D, *полученный путем деформации отрезка* $[a,b]$ *вверх в относительно малой окрестности точки* c, *см. рисунок* 8;
- γ_- – *гладкий контур в* D, *полученный путем деформации отрезка* $[a,b]$ *вниз в относительно малой окрестности точки* c, *см. рисунок* 9.

Тогда

$$v.p.\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz + \pi i \operatorname*{res}_{z=c} f(z) = \int\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz - \pi i \operatorname*{res}_{z=c} f(z).$$

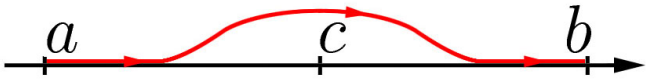

Рис. 8. Контур γ_+ выделен красным цветом.

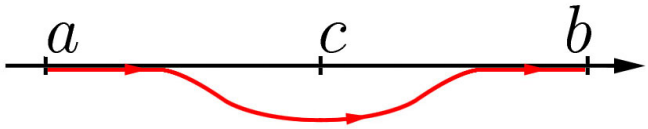

Рис. 9. Контур γ_- выделен красным цветом.

Доказательство. Пусть ε – малое положительное число и

$$C_\varepsilon = \{z \mid |z-c| = \varepsilon,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}, \quad \gamma_\varepsilon = [a, c-\varepsilon] \cup C_\varepsilon \cup [c+\varepsilon, b].$$

Мы будем предполагать, что полуокружность C_ε ориентирована по ходу часовой стрелки, а ориентация контура γ_ε соответствует направлению движения от точки a к точке b.

Из теоремы 3.3 (интегральная теорема Коши) следует, что

$$\int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz - \int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\,dz. \tag{6.8}$$

При $z \to c$ справедливо разложение

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-c} + O(1), \quad c_{-1} = \operatorname*{res}_{z=c} f(z).$$

Следовательно, при $\varepsilon \to +0$ верно, что

$$\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{c_{-1}}{z-c} + O(1)\,dz = \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{c_{-1}}{z-c}\,dz + O(\varepsilon) = -\pi i c_{-1} + O(\varepsilon). \tag{6.9}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (6.9), получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = -\pi i \operatorname*{res}_{z=c} f(z). \tag{6.10}$$

Из (6.10) следует, что существует предел при $\varepsilon \to +0$ в правой, а, следовательно, и в левой, частях равенства (6.8). Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (6.8), получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right) = \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz + \pi i \operatorname*{res}_{z=c} f(z).$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right) = \int\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz - \pi i \operatorname*{res}_{z=c} f(z). \ \square$$

Пример 6.37. *Вычислить интеграл в смысле главного значения*

$$v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Решение. Функция

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+1)}$$

интегрируема в окрестности бесконечности и имеет на контуре интегрирования полюс первого порядка в точке $z = -1$. Из теоремы 6.36 следует, что

$$v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int\limits_{\gamma_+} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)}\,dz + \pi i \operatorname*{res}_{z=-1} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)}, \tag{6.11}$$

где контур γ_+ получен путем деформации вещественной оси вверх в относительно малой окрестности точки $z = -1$.

Замыкая контур интегрирования сверху, из теоремы 6.26 получим, что

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)} = 2\pi i \frac{1}{(z+1)2z}\Big|_{z=i} = \frac{\pi}{1+i}.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\operatorname*{res}_{z=-1} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{1}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (6.11), найдем

$$v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{1+i} + \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi}{2}. \ \square$$

Определение 6.38 (Интеграл в смысле главного значения (в окрестности бесконечно удаленной точки)). *Пусть*

- $f \in C(\mathbb{R})$.

Интегралом в смысле главного значения от функции f по вещественной оси называют величину

$$v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx, \tag{6.12}$$

если предел в правой части (6.12) *существует.*

Теорема 6.39 (Вычисление интегралов в смысле главного значения (в окрестности бесконечно удаленной точки)). *Пусть*

- R – *рациональная функция;*
- $R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ *при* $z\to\infty$;
- *особые точки* R *не лежат на вещественной оси;*
- $\rho > 0$ *такое, что* R *не имеет особых точек при* $|z| > \rho$;
- γ_+ – *положительно ориентированная граница полукруга* $\{z \mid |z| < \rho,\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$, *см. рисунок* 3;
- γ_- – *отрицательно ориентированная граница полукруга* $\{z \mid |z| < \rho,\ \operatorname{Im}(z) < 0\}$, *см. рисунок* 4.

Тогда

$$v.p.\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz + \pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \int\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz - \pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

Доказательство. Пусть $R \geqslant \rho$ и

$$C_R = \{z \mid |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}, \quad \gamma_R = [-R, R] \cup C_R.$$

Мы будем предполагать, что полуокружность C_R и контур γ_R ориентированы против хода часовой стрелки.

Из теоремы 3.3 (интегральная теорема Коши) следует, что

$$\int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz.$$

Отсюда

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz - \int\limits_{C_R} f(z)\,dz. \tag{6.13}$$

При $z\to\infty$ справедливо разложение

$$f(z) = -\frac{c_{-1}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad c_{-1} = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

Следовательно, при $R\to+\infty$ верно, что

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz = \int\limits_{C_R}\left(-\frac{c_{-1}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)dz = -\int\limits_{C_R}\frac{c_{-1}}{z}\,dz + O\left(\frac{1}{R}\right) = -\pi i c_{-1} + O\left(\frac{1}{R}\right). \tag{6.14}$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ в равенстве (6.14), получим, что

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = -\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \tag{6.15}$$

Из (6.15) следует, что существует предел при $R \to +\infty$ в правой, а, следовательно, и в левой, частях равенства (6.13). Переходя к пределу при $R \to +\infty$ в равенстве (6.13), получим, что

$$v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz + \pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

Аналогично доказывается, что

$$v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz - \pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \ \square$$

Пример 6.40. *Вычислить интеграл в смысле главного значения*

$$v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+3ix-2}\,dx.$$

Решение. Функция

$$f(z) = \frac{z}{z^2+3iz-2}$$

удовлетворяет условиям теоремы 6.39. Следовательно,

$$v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+3ix-2}\,dx = \int\limits_{\gamma_+} \frac{z}{z^2+3iz-2}\,dz + \pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z}{z^2+3iz-2}, \tag{6.16}$$

где γ_+ – положительно ориентированная граница полукруга $\{z \mid |z| < 3,\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$ (особенности функции f располагаются в точках $-i$ и $-2i$).

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{z}{z^2+3iz-2}\,dz = 0$$

и

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z}{z^2+3iz-2} = \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{z} = -1.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (6.16), найдем

$$v.p. \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+3ix-2}\,dx = -\pi i. \ \square$$

7. Принцип аргумента

7.1. Принцип аргумента.

Определение 7.1 (Индекс функции на кривой). *Пусть*

- γ – *замкнутая ориентированная кусочно-гладкая кривая в* $\mathbb{C}$;
- f – *непрерывная комплексно-значная функция на кривой* γ;
- $\forall\ z \in \gamma\ f(z) \neq 0$.

Индексом функции f *на кривой* γ *называют целое число*

$$\operatorname{ind}(f, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg f,$$

где $\Delta_\gamma \arg f$ – *приращение непрерывной ветви аргумента функции* $f(z)$ *после однократного обхода точкой* z *кривой* γ *в направлении заданном ориентацией на кривой* γ.

Другими словами, индекс функции f *на кривой* γ – *это число оборотов точки* $f(z)$ *вокруг начала координат, отсчитываемые против хода часовой стрелки, при однократном обходе точкой* z *кривой* γ *в направлении заданном ориентацией на кривой* γ.

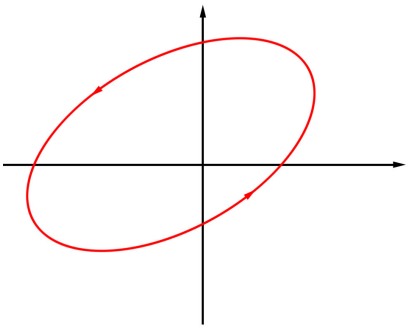

Рис. 10. $\operatorname{ind}(f, \gamma) = 1$.

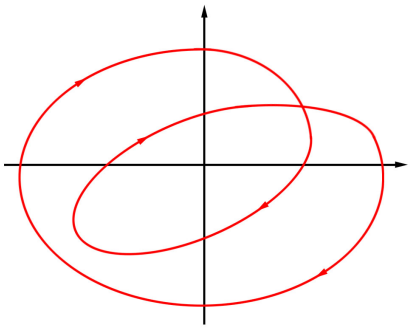

Рис. 11. $\operatorname{ind}(f, \gamma) = -2$.

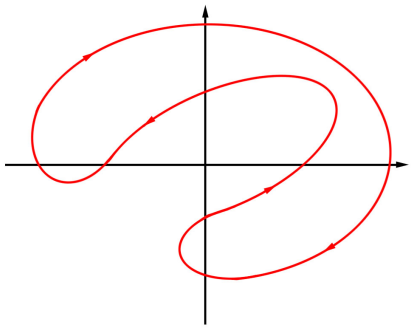

Рис. 12. $\operatorname{ind}(f, \gamma) = 0$.

Пример 7.2. *На рисунках* 10 – 12 *изображены примеры образов некоторой кривой* γ *при подходящем отображении* f, *а также приведено соответствующее значение индекса.*

Теорема 7.3 (Принцип аргумента). *Пусть*

- D – *ограниченная односвязная область в* $\mathbb{C}$;
- *граница* γ *области* D *является положительно ориентированной кусочно-гладкой замкнутой кривой;*
- $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset D$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $f \in \mathcal{H}(D \setminus E) \cap C(\overline{D} \setminus E)$;
- E – *множество полюсов функции* f *(существенно особые точки исключаются);*
- $\forall\ z \in \gamma\ f(z) \neq 0$;
- N – *число нулей функции* f *в области* D, *причем каждый нуль берется столько раз, каков его порядок;*
- P – *число полюсов функции* f *в области* D, *причем каждый полюс берется столько раз, каков его порядок.*

Тогда

$$\operatorname{ind}(f,\gamma) = N - P.$$

Доказательство. Функция f непрерывна вблизи кривой γ, поэтому существует достаточно близкая к ней кривая γ_ε, располагающаяся строго внутри области D, и такая, что все полюса и нули функции f располагаются внутри кривой γ_ε. Ради упрощения обозначений, мы сохраним обозначение γ за новой кривой γ_ε, однако, теперь мы можем считать, что f – дифференцируемая функция в окрестности кривой γ.

Заметим, что функция $\ln|f|(z)$ после однократного обхода точкой z кривой γ не может изменить своего значения, поэтому

$$\Delta_\gamma \ln|f| = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta_\gamma \ln f = \Delta_\gamma(\ln|f| + i\arg f) = \Delta_\gamma \ln|f| + i\Delta_\gamma \arg f = i\Delta_\gamma \arg f. \tag{7.1}$$

Из теоремы 3.12 (формула Ньютона-Лейбница) получим, что

$$\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int\limits_\gamma \Big(\ln f(z)\Big)'\,dz = \Delta_\gamma \ln f. \tag{7.2}$$

Из (7.1) и (7.2) получим следующее выражение для индекса функции f на кривой γ

$$\operatorname{ind}(f,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \tag{7.3}$$

Для того чтобы вычислить интеграл (по вычетам), стоящий в правой части равенства (7.3) исследуем особенности подынтегральной функции. Ясно, что функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет особенности только в нулях и полюсах функции f.

Из теоремы 4.14 следует, что множество нулей в области D конечно (иначе нашлась бы точка сгущения внутри области D, откуда следовало бы, что $f \equiv 0$ в D). Пусть $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ – множество нулей функции f в области D, где $m \in \mathbb{N}$. Пусть b_k – ноль порядка $\beta_k \in \mathbb{N}$ функции f, где $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда в окрестности точки b_k функция f раскладывается в ряд Тейлора вида

$$f(z) = c(z-b_k)^{\beta_k} + O((z-b_k)^{\beta_k+1}),$$

где постоянная c не равна нулю и зависит от точки b_k (ради упрощения обозначений мы не будем снабжать постоянную c дополнительными индексами). Отсюда получим, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{c\,\beta_k(z-b_k)^{\beta_k-1} + O((z-b_k)^{\beta_k})}{c(z-b_k)^{\beta_k} + O((z-b_k)^{\beta_k+1})} = \frac{\beta_k}{z-b_k}\frac{1+O(z-b_k)}{1+O(z-b_k)} = \frac{\beta_k}{z-b_k} + O(1)$$

при $z \to b_k$ и, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=b_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = \beta_k.$$

Рассмотрим теперь полюс a_k функции f, где $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть a_k – полюс порядка $\alpha_k \in \mathbb{N}$ функции f. Тогда в окрестности точки a_k функция f раскладывается в ряд Лорана вида

$$f(z) = c(z-a_k)^{-\alpha_k} + O((z-a_k)^{-\alpha_k+1}),$$

где $c \neq 0$. Отсюда получим, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-c\,\alpha_k(z-a_k)^{-\alpha_k-1} + O((z-a_k)^{-\alpha_k})}{c(z-a_k)^{-\alpha_k} + O((z-a_k)^{-\alpha_k+1})} = -\frac{\alpha_k}{z-a_k}\frac{1+O(z-a_k)}{1+O(z-a_k)} = -\frac{\alpha_k}{z-a_k} + O(1)$$

при $z \to a_k$ и, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = -\alpha_k.$$

Наконец, используя теорему 6.15 о вычетах и формулу (7.3), получим

$$\operatorname{ind}(f,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=b_k} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = N - P. \ \square$$

7.2. **Основная теорема алгебры.**

Теорема 7.4 (Теорема Руше). *Пусть*

- D *– ограниченная односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- *граница* γ *области* D *является кусочно-гладкой замкнутой кривой;*
- $F \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$, $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$*;*
- $\forall\ z \in \gamma\ |f(z)| < |F(z)|$*;*

Тогда функции F *и* $F + f$ *имеют в области* D *одинаковое количество нулей с учетом их порядков.*

Доказательство. Заметим, что

$$\forall\ z \in \gamma \quad |F(z) + f(z)| \geqslant |F(z)| - |f(z)| > 0.$$

Таким образом, функции $F + f$ и F не обращаются в ноль на кривой γ. Следовательно,

$$\Delta_\gamma \arg(F+f) = \Delta_\gamma \arg\left(F\left(1+\frac{f}{F}\right)\right) = \Delta_\gamma \arg F + \Delta_\gamma \arg\left(1+\frac{f}{F}\right). \tag{7.4}$$

Из условия $\forall\ z \in \gamma\ |f(z)| < |F(z)|$ следует, что при движении точки z вдоль кривой γ точка $w = 1 + \frac{f(z}{F(z)}$ все время остается внутри круга $\{w \mid |w-1| < 1\}$. Это означает, что

$$\Delta_\gamma \arg\left(1+\frac{f}{F}\right) = 0.$$

Отсюда и из (7.4) получим, что

$$\Delta_\gamma \arg(F+f) = \Delta_\gamma \arg F. \tag{7.5}$$

Наконец, из теоремы 7.3 следует, что

$$N(F) = \operatorname{ind}(F,\gamma), \quad N(F+f) = \operatorname{ind}(F+f,\gamma),$$

где $N(F)$ и $N(F+f)$ – количество нулей функций F и $F+f$ с учетом их порядков. Отсюда, принимая во внимание (7.5), получим, что

$$N(F+f) = \operatorname{ind}(F+f,\gamma) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(F+f) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg F = \operatorname{ind}(F,\gamma) = N(F). \ \square$$

Теорема 7.5 (Основная теорема алгебры). *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *уравнение*

$$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0 = 0$$

имеет ровно n *комплексных корней с учетом их кратностей.*

Доказательство. Рассмотрим функции вида

$$\forall\ z \in \mathbb{C} \quad F(z) = z^n, \quad f(z) = c_{n-1}z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0.$$

Легко видеть, что F имеет ровно n корней с учетом кратностей ($z = 0$ – единственный корень кратности n). Для доказательства теоремы достаточно показать, что функции F и $F+f$ имеют в $\mathbb{C}$ одинаковое количество нулей с учетом их кратностей.

Так как степень полинома F выше степени полинома f, то при достаточно большом положительном R верно, что

$$\forall\ z \in \gamma = \{z \mid |z| = R\} \quad |F(z)| > |f(z)|.$$

Таким образом, применима теорема Руше. Учитывая, что R – произвольное большое число, из теоремы Руше следует, что функции F и $F + f$ имеют в $\mathbb{C}$ одинаковое количество нулей с учетом их кратностей. □

Пример 7.6. *Найти количество нулей функции* $g(z) = z^7 - z^5 + 5z^2 - z + 1$ *в круге* $|z| < 1$.

Доказательство. Заметим, что функция $F(z) = 5z^2$ имеет один корень кратности два при $|z| < 1$.

Рассмотрим функцию $f(z) = z^7 - z^5 - z + 1$. При $|z| = 1$ верно, что

$$|f(z)| \leqslant |z|^7 + |z|^5 + |z| + 1 = 4 < 5 = |F(z)|.$$

Отсюда и из теоремы 7.4 (теорема Руше) следует, что функции F и $g = F+f$ имеют одинаковое количество нулей в области $|z| < 1$. Другими словами, функция g имеет два корня с учетом кратности в области $|z| < 1$. □

8. Мероморфные функции

8.1. Разложение рациональных функций на простые дроби.

Определение 8.1 (Мероморфная функция). *Функция f называется мероморфной, если*

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E)$, *где* $E \subset \mathbb{C}$;
- *любая точка z из E является полюсом функции f.*

Теорема 8.2 (Разложение рациональных функций на простые дроби). *Пусть*

- f – *мероморфная функция;*
- $E = \{z_k\}_{k=1}^n$ – *множество полюсов функции f;*
- ∞ – *полюс или устранимая особая точка функции f.*
- f_{z_k} – *главная часть ряда Лорана функции f в окрестности точки z_k, где $k \in \{1, \dots, n\}$;*
- f_∞ – *главная часть ряда Лорана функции f в окрестности бесконечности.*

Тогда

(1) f – *рациональная функция;*
(2) *найдется постоянная $c \in \mathbb{C}$ такая, что*

$$\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus E \quad f(z) = c + f_\infty(z) + \sum_{k=1}^{n} f_{z_k}(z). \tag{8.1}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию вида

$$\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus E \quad g(z) = f(z) - f_\infty(z) - \sum_{k=1}^{n} f_{z_k}(z).$$

Раскладывая функцию g в ряд Лорана в окрестности любое ее особой точки, получим, что главная часть ряда Лорана равна нулю. Это означает, что g – регулярная функция в $\mathbb{C}$. Учитывая, что на бесконечности главная часть ряда Лорана функции g также равна нулю, получим, что g – ограничена во всей комплексной плоскости. Отсюда и из теоремы 3.24 (теорема Лиувилля) следует, что g – постоянная функция в $\mathbb{C}$. Таким образом, мы доказали второе утверждение теоремы.

Заметим теперь, что каждое слагаемое в правой части формулы (8.1) является рациональной функции. Отсюда следует первое утверждение теоремы. □

Пример 8.3. *Разложить функцию*

$$f(z) = \frac{2z^2 + z + 2}{z^2 - 3z + 2}$$

на простые дроби.

Решение. Функция f имеет три особые точки: 1, 2 и ∞. Главные части ряда Лорана функции f в окрестности особых точек имеют вид

$$f_1(z) = \left.\frac{2z^2 + z + 2}{2z - 3}\right|_{z=1} \cdot \frac{1}{z-1} = -\frac{5}{z-1}, \quad f_2(z) = \left.\frac{2z^2 + z + 2}{2z - 3}\right|_{z=2} \cdot \frac{1}{z-2} = \frac{12}{z-2}, \quad f_\infty(z) = 0.$$

Из теоремы 8.2 следует, что

$$f(z) = c + f_\infty(z) + f_1(z) + f_2(z) = c - \frac{5}{z-1} + \frac{12}{z-2}, \tag{8.2}$$

где $c \in \mathbb{R}$. Переходя к пределу при $z \to \infty$ в равенстве (8.2), найдем постоянную c

$$c = \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z^2+z+2}{z^2-3z+2} = 2. \ \square$$

Ответ: $\frac{2z^2+z+2}{z^2-3z+2} = 2 - \frac{5}{z-1} + \frac{12}{z-2}$.

8.2. Разложение мероморфных функций на простые дроби.

Определение 8.4 (Правильная система контуров)**.** *Говорят, что $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ – правильная система контуров в $\mathbb{C}$, если*

- $\forall\ n \in \mathbb{N}$ γ_n *– замкнутый кусочно-гладкий контур;*
- *точка $z = 0$ принадлежит области $\mathrm{int}\gamma_1$, ограниченной контуром γ_1;*
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *контур γ_n лежит внутри области, ограниченной контуром γ_{n+1};*
- $d_n = \mathrm{dist}(0, \gamma_n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$*;*
- $\exists\ C > 0\ :\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \frac{l_n}{d_n} \leqslant C$*, где l_n – длина контура γ_n.*

Теорема 8.5 (Разложение мероморфных функций на простые дроби (случай «убывающей» функции))**.** *Пусть*

- *f – мероморфная функция;*
- *E – множество полюсов функции f;*
- *f_c – главная часть ряда Лорана функции f в окрестности точки c, где $c \in E$;*
- *$\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ – правильная система контуров;*
- *$\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n \cap E = \varnothing$;*
- *$M_n = \max\limits_{z\in\gamma_n} |f(z)| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Тогда

(1)
$$\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus E \quad f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{c\in E\cap \mathrm{int}\gamma_n} f_c(z); \tag{8.3}$$

(2) *для любого ограниченного множества K ряд (8.3) сходится равномерно на K, если отбросить в нем конечное число членов, имеющих полюсы в K.*

Доказательство. (1) Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus E$ и $n \in \mathbb{N}$ такое, что $z \in \mathrm{int}\gamma_n$. Тогда из теоремы 6.15 (теорема о вычетах) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) + \sum_{c\in E\cap\mathrm{int}\gamma_n} \operatorname*{res}_{\zeta=c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(z) - \sum_{c\in E\cap\mathrm{int}\gamma_n} f_c(z). \tag{8.4}$$

В последнем равенстве мы заметили, что

$$\operatorname*{res}_{\zeta=c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \operatorname*{res}_{\zeta=c} \frac{f_c(\zeta)}{\zeta - z} = -\operatorname*{res}_{\zeta=z} \frac{f_c(\zeta)}{\zeta - z} - \operatorname*{res}_{\zeta=\infty} \frac{f_c(\zeta)}{\zeta - z} = -f_c(z).$$

Далее, при $n \to \infty$ верно, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_n} \frac{2M_n}{d_n}\, d|\zeta| = \frac{M_n l_n}{\pi d_n} \leqslant \frac{M_n C}{\pi} \longrightarrow 0. \tag{8.5}$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (8.4), получим (8.3).

(2) Следует из того, что оценка вида (8.5) выполняется равномерно на K. $\square$

Теорема 8.6 (Разложение функции $\frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z}$ на сумму простых дробей)**.**

$$\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus E \quad f(z) = \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z} = \frac{1}{\pi z^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2},$$

где $E = \mathbb{Z}$*.*

Доказательство. Для разложения функции f на сумму простых дробей воспользуемся теоремой 8.5.

Заметим, что система контуров $\gamma_n = \{z \mid |z| = n + \frac{1}{2}\}$ при $n \in \mathbb{N}$ является правильной и, более того,

$$\max_{z \in \gamma_n} \left| \frac{\operatorname{ctg}(\pi z)}{z} \right| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Функция f имеет полюс второго порядка в точке $z = 0$. Главная часть f_0 ряда Лорана функции f в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$f_0(z) = \frac{1}{\pi\, z^2}.$$

Функция f имеет полюса первого порядка в точках $z = n$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Главная часть f_n ряда Лорана функции f в окрестности точки $z = n$ имеет вид

$$f_n(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z(\sin(\pi z))'}\bigg|_{z=n} \cdot \frac{1}{z-n} = \frac{1}{\pi n}\frac{1}{z-n}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 8.5, откуда получим, что

$$f(z) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{|n|\leqslant N} f_n(z) = \frac{1}{\pi\, z^2} + \lim_{N\to+\infty} \sum_{0<|n|\leqslant N} \frac{1}{\pi n}\frac{1}{z-n} =$$

$$= \frac{1}{\pi\, z^2} + \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{n}\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\frac{1}{z+n}\right] = \frac{1}{\pi\, z^2} + \lim_{N\to+\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z^2 - n^2}. \ \square$$

9. Многозначные функции

9.1. Аналитическое продолжение.

Определение 9.1 (Аналитическое продолжение). *Пусть*

- D – *область в* $\mathbb{C}$;
- E – *подмножество* D;
- $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$;
- $F \in \mathcal{H}(D)$;
- $F\Big|_E = f$ *(другими словами,* $\forall\ z \in E \quad f(z) = F(z)$*).*

Тогда говорят, что F – *аналитическое продолжение* f *с множества* E *на область* D.

Теорема 9.2 (Принцип аналитического продолжения). *Пусть*

- D – *область в* $\mathbb{C}$;
- E – *подмножество* D;
- *множество* E *имеет предельную точку* z_*, *которая лежит в* D.

Тогда аналитическое продолжение с множества E *на область* D *единственно.*

Доказательство. Пусть для некоторой функции f нашлось два аналитических продолжения F_1 и F_2 с множества E на область D. Из условия теоремы следует, что найдется последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно различных из множества E, сходящаяся к точке z_*. Отсюда и из теоремы 4.14 (теорема единственности) следует, что $F_1 \equiv F_2$ в области D. $\square$

Пример 9.3. *Функция* $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *является аналитическим продолжением вещественной функции* $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *с вещественной оси на всю комплексную плоскость. Из теоремы* 9.2 *следует, что такое аналитическое продолжение единственно.*

Аналогично, комплексно-значные функции $\sin z$, $\cos z$ *и т. п. являются аналитическими продолжениями соответствующих вещественно-значных функций.*

Теорема 9.4 (Теорема Римана об аналитическом продолжении). *Пусть*

- γ – *кусочно-гладкая кривая в* $\mathbb{C}$;
- D_1 *и* D_2 – *непересекающиеся области в* $\mathbb{C}$;
- $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$ – *область в* $\mathbb{C}$ *(т. е. границы областей* D_1 *и* D_2 *имеют общую часть* γ*);*
- $f_1 \in \mathcal{H}(D_1) \cap C(D_1 \cup \gamma)$;
- $f_2 \in \mathcal{H}(D_2) \cap C(D_2 \cup \gamma)$;
- $\forall\ z \in \gamma\ f_1(z) = f_2(z)$;
- $\forall\ z \in D\ F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \gamma, \\ f_2(z), & z \in D_2 \cup \gamma. \end{cases}$

Тогда $F \in \mathcal{H}(D)$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 3.26 (теорема Мореры). Пусть Γ – произвольный кусочно-гладкой замкнутой контур в D. Если Γ целиком лежит в области D_1, из теоремы 3.3 (интегральная теорема Коши) следует, что

$$\oint\limits_{\Gamma} F(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma} f_1(z)\,dz = 0.$$

Аналогично, если Γ целиком лежит в области D_2, получим, что

$$\oint\limits_{\Gamma} F(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma} f_2(z)\,dz = 0.$$

Наконец, пусть контур Γ лежит одновременно в обеих областях D_1 и D_2 (ради определенности будем считать, что контур Γ положительно ориентирован относительно своей внутренности). В этом случае положим $\Gamma_1 = \Gamma \cap D_1$, $\Gamma_2 = \Gamma \cap D_2$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \overline{\operatorname{int}\Gamma} \cap \gamma$. При этом будем считать, что ориентация на контурах γ_1 и γ_2 задана так, чтобы замкнутые контура $\Gamma_1 \cup \gamma_1$ и $\Gamma_1 \cup \gamma_1$ оказались положительно ориентированы. В этом случае ориентации на контурах γ_1 и γ_2 будут противоположными, см. рисунок 13.

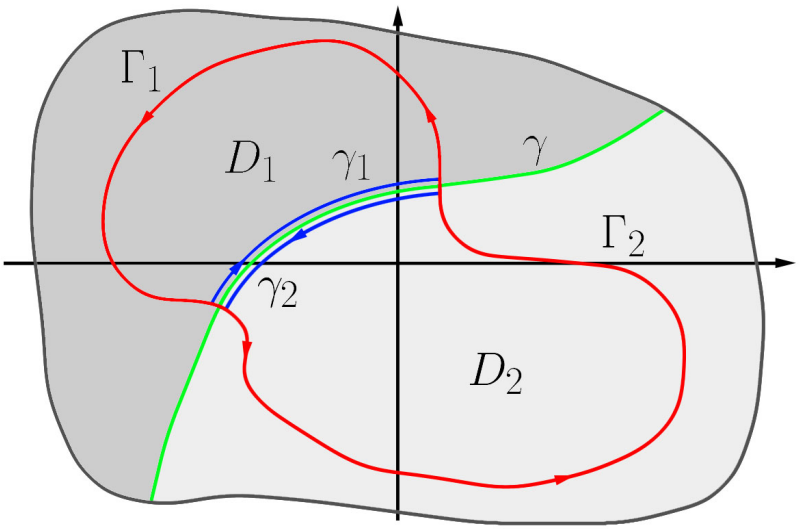

Рис. 13. Область D_1 выделена темно-серым цветом, D_2 – светло-серым, контур Γ – красным, γ – зеленым, γ_1 и γ_2 – синим.

Легко видеть, что

$$\oint\limits_{\Gamma} F(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_1} F(z)\,dz + \oint\limits_{\Gamma_2} F(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_1} F(z)\,dz + \oint\limits_{\gamma_1} F(z)\,dz + \oint\limits_{\gamma_2} F(z)\,dz + \oint\limits_{\Gamma_2} F(z)\,dz =$$
$$= \oint\limits_{\Gamma_1\cup\gamma_1} F(z)\,dz + \oint\limits_{\Gamma_2\cup\gamma_2} F(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_1\cup\gamma_1} f_1(z)\,dz + \oint\limits_{\Gamma_2\cup\gamma_2} f_2(z)\,dz = 0.$$

Отсюда и из теоремы 3.26 (теорема Мореры) следует, что $F \in \mathcal{H}(D)$. □

Теорема 9.5 (Принцип симметрии). *Пусть*

- D *– область в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*;*
- *граница области* D *содержит интервал* γ *вещественной оси;*
- $f \in C(D \cup \gamma)$*;*
- $\forall\ z \in \gamma\ f(z) \in \mathbb{R}$.

Тогда

(1) *функция f может быть аналитически продолжена через γ в область $D* = \{z \mid \bar{z} \in D\}$;*
(2) *аналитическое продолжение F задается формулой*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^*. \end{cases}$$

Доказательство. Из вещественности функции f на $\gamma \subset \mathbb{R}$ следует, что

$$\forall\, z \in \gamma \quad f(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Докажем, что функция

$$\forall\, z \in D^* \quad g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

регулярна в области D^*. Действительно,

$$\forall\, z \in D^* \quad g(z+h) - g(z) = \overline{f(\bar{z}+\bar{h})} - \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})} = \overline{f'(\bar{z})\bar{h} + o(\bar{h})} = \overline{f'(\bar{z})}\, h + o(h)$$

при $\mathbb{C} \ni h \to 0$.

Теперь необходимое утверждение следует, из теоремы 9.4. □

9.2. **Регулярные ветви многозначных функций.**

Определение 9.6 (Регулярная ветвь многозначной функции)**.** *Однозначной регулярной ветвью (или, сокращенно, регулярной ветвью) многозначной функции $f(z)$ в области D называют всякую регулярную функцию $f_0(z)$ в D такую, что в любой точки $z \in D$ значение функции $f_0(z)$ совпадает с одним из значений функции $f(z)$.*

Пример 9.7. *Выделить однозначную регулярную ветвь функции $\sqrt[4]{z}$.*

Решение. Функция $\sqrt[4]{z}$ в каждой точке $z \neq 0$ принимает три различных значения. Для того чтобы выделить регулярную ветвь функции $\sqrt[4]{z}$, удобно переписать ее в полярных координатах

$$f(z) = \sqrt[4]{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{4} + i\frac{\pi n}{2}}. \tag{9.1}$$

Пусть теперь мы фиксировали значение функции $f(z) = \sqrt[4]{z}$ в некоторой точке $z_0 \neq 0$, например, $f(1) = 1$. Из представления (9.1) видно, что если мы теперь будем непрерывно продолжать функцию $\sqrt[4]{z}$ вдоль окружности $|z| = 1$ против часовой стрелки, то по возвращении в точку $z = 1$ аргумент φ получит приращение равное $\Delta\varphi = 2\pi$, и, соответственно, функция $\sqrt[4]{z}$ получит дополнительный множитель $e^{i\frac{\Delta\varphi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Рассуждая аналогично, можно понять, что при обходе вдоль любого контура, охватывающего начало координат ровно один раз, функция $\sqrt[4]{z}$ будет менять свое значение. Это означает, что регулярную ветвь функции $\sqrt[4]{z}$ можно выделить только в такой области, внутри которой нельзя провести замкнутый контур, содержащий внутри себя начало координат. Примером такой области может служить, например, область вида

$$D = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty).$$

Фиксируем в области D пределы изменения аргумента $\varphi \in (0, 2\pi)$. В результате, согласно представлению (9.1), мы можем выделить четыре различные ветви функции $\sqrt[4]{z}$

$$f_n(z) = \sqrt[4]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{4} + i\frac{\pi n}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Остальные значения параметра n приводят к одной из описанных ветвей функции $\sqrt[4]{z}$.

Ответ: В области $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ можно выделить четыре однозначные регулярные ветви $f_n(z) = \sqrt[4]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{4} + i\frac{\pi n}{2}}$, где $n = 0, 1, 2, 3$ и $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Пример 9.8. *Пусть в правой полуплоскости* $\operatorname{Re}(z) > 0$ *задана регулярная ветвь функции* $f(z) = \sqrt{z}$*, удовлетворяющая условию* $f(1) = 1$*. Найти аналитическое продолжение функции* $f(z)$ *в левую полуплоскость* $\operatorname{Re}(z) < 0$ *через полуось* $(0, +i\infty)$ *и через полуось* $(0, -i\infty)$*. Сравнить значения полученных аналитических продолжений в точке* $z = -1$*.*

Решение. Перейдем к полярным координатам

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9.2}$$

Фиксируем пределы изменения аргумента φ в правой полуплоскости $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Отсюда и из представления (9.2) получим, что

$$f(1) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi n}\Big|_{z=1} = \begin{bmatrix} r = 1 \\ \varphi = 0 \end{bmatrix} = e^{i\pi n}.$$

Таким образом, ветвь, удовлетворяющая условию $f(1) = 1$, получается, например, при $n = 0$. Обозначим ее через $f_0(z)$.

Для того чтобы аналитически продолжить функцию $f_0(z)$ в левую полуплоскость через полуось $(0, +i\infty)$, воспользуемся представлением (9.2) при $n = 0$

$$f_t(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

и фиксируем пределы изменения аргумента φ следующим образом $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Легко видеть, что $f_t(z)$ – регулярная ветвь, заданная в области $\mathbb{C} \setminus [0, -i\infty)$. При этом функция $f_t(z)$ совпадает с функцией $f_0(z)$ в области $\operatorname{Re}(z) > 0$, а потому $f_t(z)$ – аналитическое продолжение функции $f_0(z)$ в левую полуплоскость через полуось $(0, +i\infty)$.

Для того чтобы аналитически продолжить функцию $f_0(z)$ в левую полуплоскость через полуось $(0, -i\infty)$, воспользуемся представлением

$$f_b(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

и фиксируем пределы изменения аргумента $\varphi \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Очевидно, что $f_b(z)$ – аналитическое продолжение функции $f_0(z)$ в левую полуплоскость через полуось $(0, -i\infty)$.

Найдем значения ветвей $f_t(z)$ и $f_b(z)$ в точке $z = -1$

$$f_t(-1) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\Big|_{r=1,\ \varphi=\pi} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$
$$f_b(-1) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\Big|_{r=1,\ \varphi=-\pi} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i. \ \square$$

Ответ: $f_t(-1) = i$, $f_b(-1) = -i$.

Определение 9.9 (Точка ветвления)**.** *Особая точка* z_0 *называется точкой ветвления многозначной функции* $f(z)$*, если существует такая проколотая окрестность* $0 < |z - z_0| < r$*, что любая регулярная ветвь функции* $f(z)$ *может быть аналитически продолжена вдоль любой цепочки областей, принадлежащих этой окрестности, и найдется регулярная ветвь функции* $f(z)$*, которая не может быть аналитически продолжена во всю проколотую окрестность* $0 < |z - z_0| < r$*.*

Пример 9.10. *Пусть* f *– регулярная функция в ограниченной области* D*. Найти все точки ветвления функции* $\sqrt{f}$*.*

Решение. Из определения следует, что точки ветвления – это в первую очередь особые точки. Поэтому вначале выясним в каких точках функция $\sqrt{f}$ допускает выделение регулярной ветви. Для этого вычислим ее производную

$$\left(\sqrt{f(z)}\right)' = \frac{f'(z)}{2\sqrt{f(z)}}\,. \tag{9.3}$$

Строго говоря, в выражении (9.3) необходимо указать какая ветвь корня выбрана в обеих частях равенства, однако поскольку мы сейчас ищем только лишь точки регулярности функции $\sqrt{f}$, то этот вопрос не является принципиальным и мы позволим себе не останавливаться на нем.

Из равенства (9.3) видно, что особые точки функции $\sqrt{f}$ могут появляться в тех точках, в которых функция f обращается в ноль. Таким образом, естественные кандидаты на точки ветвления функции $\sqrt{f}$ – это нули функции f.

Пусть в точке $z_0 \in D$ у функции $f(z)$ нуль порядка n. Тогда ее можно переписать в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

где $g(z)$ – регулярная функция в области D и $n \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$\sqrt{f(z)} = (z - z_0)^{n/2}\sqrt{g(z)}\,.$$

Из сказанного ранее ясно, что функция $\sqrt{g(z)}$ допускает выделение регулярной ветви в окрестности точки z_0. При этом у функции $(z-z_0)^{n/2}$ (а, следовательно, и у функции $\sqrt{f}$) точка z_0 не является точкой ветвления если n – четное и является точкой ветвления, если n – нечетное. □

Ответ: Точки ветвления функции $\sqrt{f}$ располагаются в нулях нечетного порядка функции f.

Пример 9.11. *Доказать, что функция* $f(z) = \sqrt{z^2 - 5z + 4}$ *допускает выделение регулярной ветви* F *в окрестности точки* $z = 0$*, удовлетворяющей условию* $F(0) = -2$*. Найти результат аналитического продолжения* F *в точку* $z = 2$ *вдоль контура* $\gamma = \{z \mid |z - 1| = 1,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Решение. У функции f две конечные точки ветвления $z_1 = 1$ и $z_2 = 4$. Введем две полярные

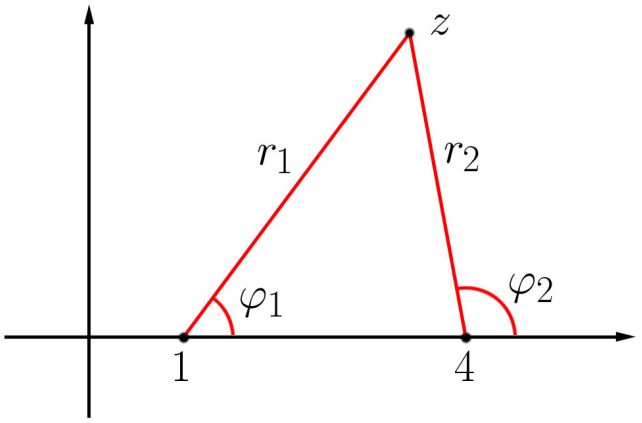

Рис. 14. Полярные координаты $z - 1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z - 4 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

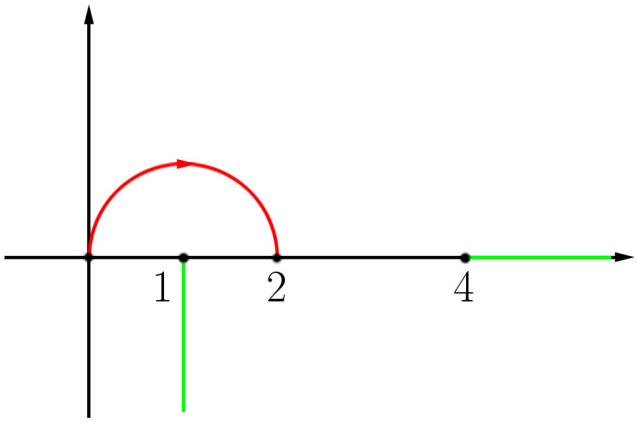

Рис. 15. Контур γ выделен красным цветом, разрезы – зеленым.

системы координат с центрами в этих точках (см. рисунок 14)

$$z - 1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - 4 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

В этих координатах функция $f(z)$ может быть переписана следующим образом

$$f(z) = \sqrt{(z-1)(z-4)} = \sqrt{r_1 r_2}\, \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi n}{2} i\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для того чтобы фиксировать пределы изменения углов φ_1 и φ_2, проведем разрезы как показано на рисунке 15. При этом пределы изменения углов удобно выбрать следующим образом $\varphi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $\varphi_2 \in (0, 2\pi)$. Таким образом, на области

$$D = \mathbb{C} \setminus \Big([4, +\infty) \cup (1 - i\infty, 1]\Big)$$

функция f допускает выделение двух регулярных ветвей

$$f_n(z) = \sqrt{r_1 r_2}\, \exp\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi n}{2} i\right), \quad n = 0, 1.$$

Найдем значения ветвей f_0 и f_1 в точке $z = 0$

$$f_0(0) = [\varphi_1 = \pi,\ \varphi_2 = \pi,\ r_1 = 1,\ r_2 = 4,\ n = 0] = 2e^{\pi i} = -2,$$
$$f_1(0) = [\varphi_1 = \pi,\ \varphi_2 = \pi,\ r_1 = 1,\ r_2 = 4,\ n = 1] = 2e^{2\pi i} = 2.$$

Таким образом, f_0 является искомой ветвью F регулярной функции f.

Заметим, что область регулярности D ветви f_0 выбрана так, что контур γ целиком лежит в области D. Поэтому результат аналитического продолжения ветви f_0 вдоль контура γ дается значением функции f_0 в точке $z = 2$

$$f_0(2) = [\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi,\ r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ n = 0] = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{2} i} = \sqrt{2}\, i. \ \square$$

9.3. **Римановы поверхности простейших многозначных функций.**

Пример 9.12. *Риманова поверхность функции* $f(z) = \sqrt{z}$.

Решение. У функции $\sqrt{z}$ одна конечная точка ветвления $z_1 = 0$. Переходя к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, перепишем функцию f в виде

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}+i\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9.4}$$

Для того, чтобы выделить однозначные ветви функции f, проведем разрез из точки ветвления $z_1 = 0$ на бесконечность вдоль полуоси $[0, +\infty)$. Соответственно с этим, пределы изменения угла φ фиксируем следующим образом

$$\varphi \in (0, 2\pi).$$

Параметрам $n = 0$ и $n = 1$ в формуле (9.4) соответствуют две различные регулярные ветви f_0 и f_1 функции f (остальные значения параметра n приводят к одной из указанных ветвей). Выпишем выражение для каждой из выделенных ветвей

$$f_n(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}+i\pi n}, \quad n = 0, 1.$$

Будем считать, что ветвь f_0 задана на листе D_0, а ветвь f_1 на D_1. Вычислим значения функций f_0 и f_1 на берегах разрезов листов D_0 и D_1, см. рисунки 16 и 17. Теперь нужно подходящим

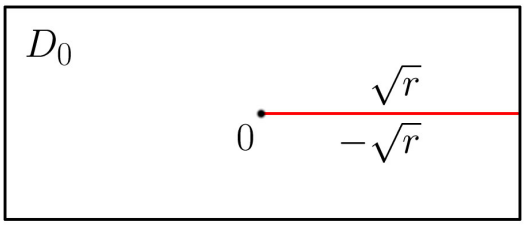

Рис. 16. Значения функции f_0 на берегах разрезов листа D_0.

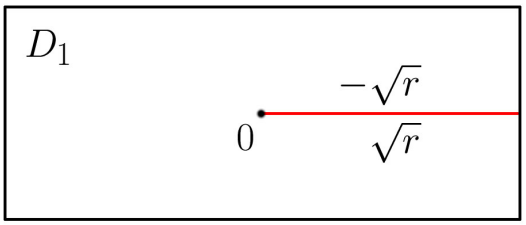

Рис. 17. Значения функции f_1 на берегах разрезов листа D_1.

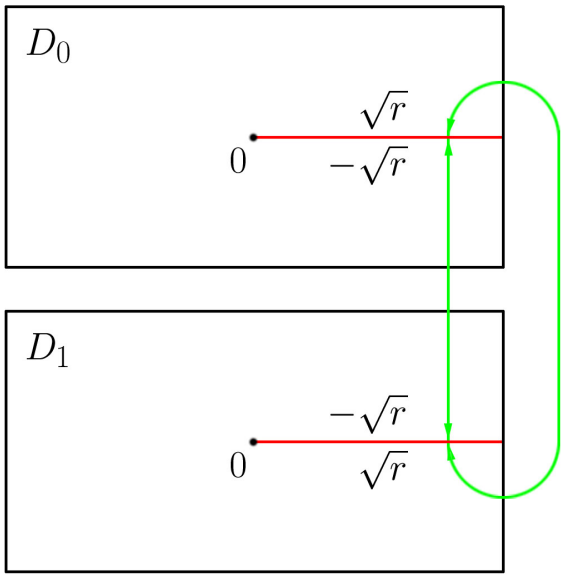

Рис. 18. Риманова поверхность $\sqrt{z}$.

образом склеить листы D_0 и D_1. Сравнивая значения функций f_0 и f_1 на различных берегах разрезов листов D_0 и D_1 и учитывая теорему 9.4 (теорема Римана об аналитическом продолжении), найдем требуемую склейку, см. рисунок 18. □

Ответ: Риманова поверхность функции $\sqrt{z}$ изображена на рисунке 18. При этом на листе D_0 справедливо представление $f_0(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$, а на листе D_1 – $f_1(z) = -\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$, где $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Пример 9.13. *Риманова поверхность функции* $f(z) = \ln z$.

Решение. У функции $\ln z$ одна конечная точка ветвления $z_1 = 0$. Переходя к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$, перепишем функцию f в виде

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для того чтобы выделить однозначные ветви, проводим разрез из точки ветвления $z_1 = 0$ на бесконечность, например, вдоль полуоси $[0, +\infty)$. В соответствии с этим разрезом, фиксируем пределы изменения угла $\varphi \in (0, 2\pi)$. Выпишем выражение для каждой из выделенных ветвей

$$f_n(z) = \ln r + i\varphi + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9.5}$$

Отметим, что различным параметрам n в формуле (9.5) соответствуют различные регулярные ветви функции f.

Будем считать, что ветвь f_n задана на листе D_n при $n \in \mathbb{Z}$. Вычислим значения функций f_{-1}, f_0 и f_1 на берегах разрезов листов D_{-1}, D_0 и D_1, см. рисунки 19, 20 и 21. Теперь нужно

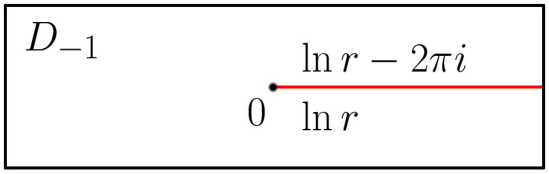

Рис. 19. Значения функции f_{-1} на берегах разрезов листа D_{-1}.

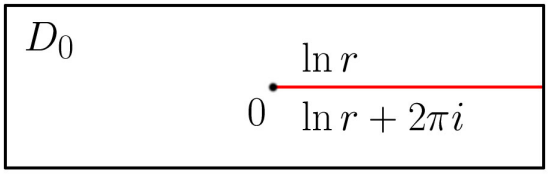

Рис. 20. Значения функции f_0 на берегах разрезов листа D_0.

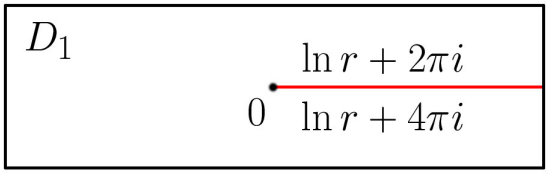

Рис. 21. Значения функции f_1 на берегах разрезов листа D_1.

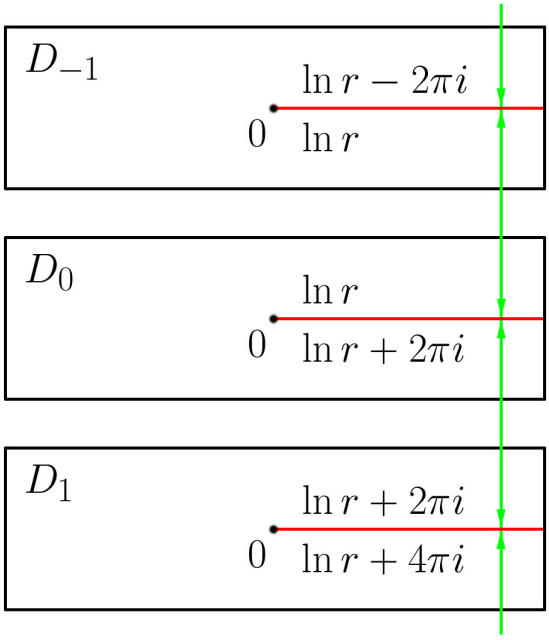

Рис. 22. Риманова поверхность $\ln z$.

подходящим образом склеить листы D_n. Сравнивая значения функций f_n на различных берегах разрезов листов D_n найдем требуемую склейку. На рисунке 22 изображена склейка листов D_{-1}, D_0 и D_1. Остальные листы подклеиваются аналогично.

Ответ: Риманова поверхность $\ln z$ состоит из бесконечного набора листов D_n, склейка нескольких из них изображена на рисунке 22. На каждом листе D_n фиксирована регулярная ветвь $f_n(z)$ равенством (9.5), причем $\varphi \in (0, 2\pi)$.

9.4. **Вычисление интегралов от многозначных функций.**

Теорема 9.14 (Вычисление интегралов от многозначных функций по положительной полуоси)**.** *Пусть*

- $D = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$;
- $E = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset D$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $f \in \mathcal{H}(D \setminus E)$;
- *для любого* $x > 0$ *существуют конечные пределы* $f(x \pm i0)$;
- $\gamma_\rho = \{z \mid |z| = \rho\}$, *где* $\rho > 0$;
- $\max\limits_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = o\left(\frac{1}{\rho}\right)$ *при* $\rho \to 0$;
- $\max\limits_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| = o\left(\frac{1}{\rho}\right)$ *при* $\rho \to \infty$;
- $r > 0$ *и* $R > 0$ *такие, что* $\forall\ z \in E\ r < |z| < R$;
- γ_+ – *положительно ориентированная граница области* $D \setminus \Big(\{z \mid |z| < r\} \cup \{z \mid |z| > R\}\Big)$, *см. рисунок* 23.

Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x + i0)\,dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x - i0)\,dx = \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz.$$

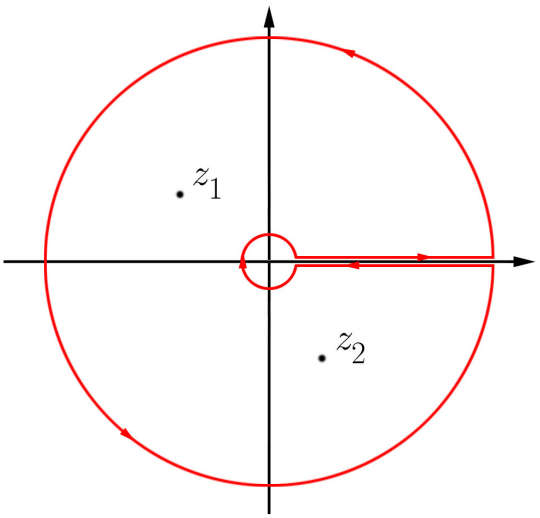

Рис. 23. Контур γ_+ выделен красным цветом.

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 6.26.

Пример 9.15. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Решение. Рассмотрим многозначную функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)\sqrt{z}}$$

и фиксируем ее ветвь в области $D = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ равенством

$$f_0(z) = \frac{1}{(z+1)\sqrt{r}}\, e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Из теоремы 9.14 следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} f_0(x + i0)\,dx - \int\limits_0^{+\infty} f_0(x - i0)\,dx = \int\limits_{\gamma_+} f_0(z)\,dz, \tag{9.6}$$

где контур γ_+ изображен на рисунке 23. Легко видеть, что

$$f_0(x + i0) = \Big[r = x,\ \varphi = 0\Big] = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}, \quad f_0(x - i0) = \Big[r = x,\ \varphi = 2\pi\Big] = -\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$$

при $x > 0$. Отсюда и из равенства (9.6) следует, что

$$2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int\limits_{\gamma_+} f_0(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f_0(z). \tag{9.7}$$

Функция f_0 имеет в точке $z = -1$ полюс первого порядка. Вычет может быть найден с помощью теоремы 6.6 (или теоремы 6.4)

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f_0(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{r}}\,e^{-i\frac{\varphi}{2}}\Big|_{r=1,\ \varphi=\pi} = -i.$$

Подставляя найденный вычет в формулу (9.7), найдем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f_0(z) = \pi. \ \square$$

10. Гамма-функция

10.1. Гамма-функция.

Определение 10.1 (Гамма-функция). *Гамма-функцией (сокращенно, Γ-функцией) называют функцию, определенную при* $\operatorname{Re} z > 0$ *равенством*

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Теорема 10.2 (Регулярность Γ-функции). $\Gamma \in \mathcal{H}(\Pi_+)$, *где* $\Pi_+ = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Доказательство. Пусть γ – произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая в Π_+. Тогда найдутся $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что $\gamma \subset \{z \mid \varepsilon_1 < \operatorname{Re} z < \varepsilon_2\}$, откуда получим, что

$$\forall\ (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \gamma \quad |t^{z-1} e^{-t}| \leqslant \begin{cases} t^{\varepsilon_1 - 1} e^{-t}, & t \in (0, 1], \\ t^{\varepsilon_2 - 1} e^{-t}, & t \in (1, +\infty). \end{cases} \tag{10.1}$$

Из (10.1) следует, что функция двух переменных $t^{z-1} e^{-t}$ интегрируема на $\mathbb{R}_+ \times \gamma$. Отсюда и из теоремы Фубини получим, что можно переставлять пределы интегрирования в интеграле

$$\oint\limits_\gamma \Gamma(z)\, dz = \oint\limits_\gamma \left(\int\limits_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \right) dz = \int\limits_0^{+\infty} \left(\oint\limits_\gamma t^{z-1} e^{-t}\, dz \right) dt. \tag{10.2}$$

Учитывая, что функция t^{z-1} регулярна по переменной z в правой полуплоскости Π_+, из теоремы 3.3 (интегральная теорема Коши) следует, что

$$\oint\limits_\gamma t^{z-1}\, dz = 0. \tag{10.3}$$

Из (10.2) и (10.3) получим, что для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой в Π_+ верно, что

$$\oint\limits_\gamma \Gamma(z)\, dz = 0.$$

Отсюда и из теоремы 3.26 (теорема Мореры) следует, что $\Gamma \in \mathcal{H}(\Pi_+)$. □

Теорема 10.3 (Функциональное уравнение для Γ-функции). $\forall\ z \in \Pi_+\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Доказательство. При $\forall\ z \in \Pi_+$ верно, что

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^z e^{-t}\, dt = -\int\limits_0^{+\infty} t^z\, de^{-t} = -t^z\, e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} z t^{z-1} e^{-t}\, dt = z\Gamma(z).\ \square$$

Теорема 10.4 (Аналитическое продолжение Γ-функции в $\mathbb{C}$).

(1) $\Gamma(z)$*-функция допускает аналитическое продолжение в* $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$;
(2) $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, *где под* Γ*-функцией понимается аналитическое продолжение в область* $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Доказательство. (1) Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}. \tag{10.4}$$

Легко видеть, что $f \in \mathcal{H}\Big(\{z \mid \operatorname{Re} z > -1\} \setminus \{0\}\Big)$. Из теоремы 10.3 следует, что

$$\forall\ z \in \Pi_+ \quad f(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z).$$

Таким образом, f – аналитическое продолжение Γ-функции в область $\{z \mid \operatorname{Re} z > -1\} \setminus \{0\}$.

Сохраним за аналитическим продолжением Γ-функции прежнее обозначение – Γ. Снова воспользуемся формулой (10.4) и заметим, что на этот раз $f \in \mathcal{H}\Big(\{z \mid \operatorname{Re} z > -2\} \setminus \{0, -1\}\Big)$. Вместе с этим

$$\forall\ z \in \{z \mid \operatorname{Re} z > -1\} \setminus \{0\} \quad f(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z).$$

Таким образом, f – аналитическое продолжение Γ-функции в область $\{z \mid \operatorname{Re} z > -2\} \setminus \{0, -1\}$.

Продолжая построение по индукции, получим требуемое утверждение.

(2) Следует из построения аналитического продолжения, предложенного в пункте (1). □

Теорема 10.5 (Основные свойства Γ-функции)**.**

(1) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ \Gamma(n+1) = n!$;

(2) $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+$ *Γ-функция имеет в точке* $z = -n$ *полюс первого порядка и* $\operatorname*{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$;

(3) $\forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$;

(4) $\forall\ z \in \mathbb{C}\ \Gamma(z) \neq 0$;

(5) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Доказательство. (1) Для начала заметим, что

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1.$$

Отсюда и из теоремы 10.4 следует, что

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\,\Gamma(1) = n!.$$

(2) Из теоремы 10.4 следует, что

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}\,.$$

Отсюда, учитывая, что функция $\Gamma(z+n+1)$ регулярна в окрестности точки $z = -n$, получим, что Γ-функция имеет в точке $z = -n$ полюс первого порядка. Вместе с этим,

$$\forall\ n \in \mathbb{Z}_+ \quad \operatorname*{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\bigg|_{z=-n} = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\ldots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\,.$$

(3) Без доказательства.

(4) Следует из пункта (3) настоящей теоремы.

(5) Следует из пункта (3) настоящей теоремы при $z = \frac{1}{2}$ и простого наблюдения

$$\forall\ z > 0 \quad \Gamma(z) > 0. \ \square$$

Определение 10.6 (Бета-функция)**.** *Бета-функцией называют функцию, определенную при* $\operatorname{Re} z > 0$ *и* $\operatorname{Re} w > 0$ *равенством*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt.$$

Теорема 10.7 (Связь между Гамма и Бета-функциями)**.** *При* $\operatorname{Re} z > 0$ *и* $\operatorname{Re} w > 0$ *справедливо равенство*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\,.$$

Доказательство. Без доказательства. □

11. Конформные отображения

11.1. Геометрические свойства регулярных функций.

Теорема 11.1 (Необходимое условие обратимости регулярной функции). *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*;*
- *функция* f *обратима в некоторой окрестности* U *точки* $z_0 \in D$*.*

Тогда $f'(z_0) \neq 0$*.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n)}(z_0) = 0$ и $f^{(n+1)}(z_0) \neq 0$, где $n \in \mathbb{N}$. Из теоремы 4.11 (теорема об изолированности нулей регулярной функции) следует, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon = \{z \mid |z - z_0| \leqslant \varepsilon\} \subset U$ и

$$0 < |z - z_0| \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f'(z) \neq 0,\ f(z) \neq f(z_0).$$

Таким образом, в круге U_ε функция $f - f(z_0)$ имеет единственный нуль кратности $(n+1)$.

Пусть теперь

$$\delta = \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - f(z_0)| > 0$$

и w_* такое, что $0 < |f(z_0) - w_*| < \delta$. Докажем, что функция f принимает значение w_* в n различных точках, принадлежащих U_ε.

Заметим, что

$$|z - z_0| = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(z_0) - w_*| < \delta \leqslant |f(z) - f(z_0)|.$$

Отсюда и из теоремы 7.4 (теорема Руше) следует, что функции

$$f(z) - f(z_0)$$

и

$$f(z) - w_* = f(z) - f(z_0) + f(z_0) - w_*$$

имеют в круге U_ε одинаковое количество нулей с учетом их порядков. Учитывая, что в круге U_ε при $z \neq z_0$ выполнено условие $f'(z) \neq 0$, отсюда получим, что функция f принимает значение w_* в круге U_ε ровно в $(n+1)$ различных точках.

Таким образом, функция f не обратима в круге U_ε. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 11.2 (Принцип сохранения области). *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$*;*
- f *– не постоянная функция в* D*.*

Тогда образ области D *при отображении* f *является областью.*

Доказательство. Пусть $G = f(D)$, $z_0 \in D$, $w_0 \in G$ и $f(z_0) = w_0$. Для доказательства теоремы необходимо доказать, что найдется окрестность V точки w_0 такая, что $V \subset G$.

В случае $f'(z_0) \neq 0$, требуемое утверждение следует из теоремы 2.20. Если же $f'(z_0) = 0$, то также как и при доказательстве теоремы 11.1 получим, что найдется окрестность V точки w_0 такая, что для любого $w_* \in V$ найдется не менее двух точек z_1 и z_2 таких, что $z_1 \in D$, $z_2 \in D$ и $f(z_1) = f(z_2) = w_*$. Следовательно, $V \subset G$ (хотя f и не является обратимой в окрестности точки z_0) □

11.2. **Локальные свойства конформных отображений.**

Определение 11.3 (Область в $\overline{\mathbb{C}}$)**.** *Множество точек D на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ называют областью, если выполнены следующие условия.*

- **Открытость:** *для любой конечной точки $z_0 \in D$ $\exists\, r > 0 : \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset D$;*
- *для бесконечно удаленной точки $z_0 = \infty \in D$ $\exists\, R > 0 : \{z \mid |z| > R\} \subset D$.*
- **Линейная связность:** *для любых двух конечных точек множества D найдется ломаная (линия, состоящая из конечного числа прямолинейных отрезков) целиком принадлежащая D.*

Определение 11.4 (Конформное отображение)**.** *Говорят, что f – конформное отображение области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ на область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, если*

(1) *f – взаимно однозначное отображение D на G;*
(2) *f – регулярная функция в D, за исключением не более чем одной точки;*
   - *мы будем считать функцию f регулярной на бесконечности, если f имеет устранимую особенность на бесконечности.*

Теорема 11.5 (Поведение конформного отображения в окрестности изолированной особой точки)**.** *Пусть*

- *f – конформное отображение области D на G;*
- *$z_0 \in D \;:\; f(z_0) = \infty \in G$.*

Тогда функция f имеет в точке z_0 полюс 1-го порядка.

Доказательство. Пусть $z_0 \neq \infty$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g = \frac{1}{f}$. Легко видеть, что g взаимно однозначно отображает окрестность точки z_0 на окрестность нуля ($g(z_0) = 0$). Отсюда и из теоремы 11.1 следует, что $g'(z_0) \neq 0$. Таким образом, разложение в ряд Тейлора функции в окрестности точки z_0 имеет вид

$$g(z) = g'(z_0)(z - z_0) + O((z - z_0)^2).$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g'(z_0)} \frac{1}{z - z_0} + O(1)$$

при $z \to z_0$. Последняя оценка означает, что функция f имеет в точке z_0 полюс первого порядка.

Пусть теперь $z_0 = \infty$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Заметим, что g взаимно однозначно отображает окрестность нуля на окрестность нуля. Также как и ранее получим, что разложение в ряд Тейлора функции в окрестности точки ноль имеет вид

$$g(z) = g'(0)z + O(z^2).$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{g'(0)\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{z}{g'(0)} + O(1)$$

при $z \to \infty$. Последняя оценка означает, что функция f имеет в бесконечно удаленной точке полюс первого порядка. □

Теорема 11.6 (Геометрические свойства производной конформного отображения)**.** *Пусть*

- f *– конформное отображение области* $D \subset \mathbb{C}$ *на область* $G \subset \mathbb{C}$.

Тогда в окрестности любой точки $z_0 \in D$*, с точностью до* $O\left((z-z_0)^2\right)$*, отображение* f *является композицией следующих отображений*

(1) *сдвиг на* $-z_0$*;*
(2) *поворот на угол* $\arg f'(z_0)$ *(относительно начала координат);*
(3) *растяжение с коэффициентом растяжения* $|f'(z_0)|$ *(относительно начала координат);*
(4) *сдвиг на* $f(z_0)$.

Доказательство. Следует из разложения

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + O\left((z-z_0)^2\right) = f(z_0) + r|f'(z_0)|\, e^{i(\varphi + \arg f'(z_0))} + O(r^2), \quad z \to z_0,$$

где

$$z - z_0 = re^{i\varphi}. \ \square$$

Теорема 11.7 (Геометрические свойства конформного отображения)**.** *Конформное отображение сохраняет углы между кривыми, ориентацию, а также форму бесконечно малых фигур с точностью до бесконечно малых более старшего порядка.*

Доказательство. Следует из теоремы 11.6. $\square$

11.3. **Общие свойства конформных отображений.**

Теорема 11.8 (Принцип соответствия границ)**.** *Пусть*

- D *– ограниченная область в* $\mathbb{C}$ *с кусочно-гладкой границей* ∂D*;*
- G *– ограниченная область в* $\mathbb{C}$ *с кусочно-гладкой границей* ∂G*;*
- f *– конформное отображение* D *на* G.

Тогда функцию f *можно доопределить на* $\overline{D} = D \cup \partial D$ *так, что*

(1) $f \in C(\overline{D})$*;*
(2) f *– взаимно-однозначно отображает* ∂D *на* ∂G *с сохранением ориентации.*

Доказательство. Без доказательства. $\square$

Теорема 11.9 (Обратный принцип соответствия границ)**.** *Пусть*

- D *– ограниченная область в* $\mathbb{C}$ *с кусочно-гладкой границей* ∂D*;*
- G *– ограниченная область в* $\mathbb{C}$ *с кусочно-гладкой границей* ∂G*;*
- $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$*;*
- f *– взаимно-однозначно отображает* ∂D *на* ∂G *с сохранением ориентации.*

Тогда f *– конформное отображение* D *на* G.

Доказательство. Пусть w_0 – произвольная точка из области G и $N(w_0)$ – число прообразов (с учетом кратности) точки w_0 в области D при отображении f. Из теоремы 7.3 (принцип аргумента) следует, что

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg(f(z) - w_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G} \arg(w - w_0) = 1.$$

Здесь мы также воспользовались тем фактом, что f – взаимно-однозначно отображает ∂D на ∂G с сохранением ориентации.

Пусть теперь $w_0 \notin \overline{G}$, тогда

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg(f(z) - w_0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G} \arg(w - w_0) = 0.$$

Таким образом, f – взаимно-однозначное отображение D на G и, следовательно, f – конформное отображение D на G. □

Теорема 11.10 (Теорема Римана)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\overline{\mathbb{C}}$*;*
- *граница* ∂D *области* D *состоит более чем из одной точки;*
- $z_0 \in D$, $|w_0| < 1$, $\alpha_0 \in (-\pi, \pi]$.

Тогда существует единственное конформное отображение f *области* D *на единичный круг* $\{w \mid |w| < 1\}$*, удовлетворяющее условиям*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0.$$

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание 11.11.

- *Комплексная плоскость* $\mathbb{C}$ *не может быть конформно отображена на единичный круг.*
- *Расширенная комплексная плоскость* $\overline{\mathbb{C}}$ *не может быть конформно отображена на единичный круг.*
- *Расширенная комплексная плоскость* $\overline{\mathbb{C}}$ *не может быть конформно отображена на комплексную плоскость* $\mathbb{C}$*.*

11.4. Дробно-линейные отображения.

Определение 11.12 (Дробно-линейное отображение)**.** *Дробно-линейным отображением называют отображение вида*

$$\overline{\mathbb{C}} \ni z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \overline{\mathbb{C}},$$

где $ad - bc \neq 0$*. При этом предполагается, что*

- *если* $c \neq 0$*, то* $\frac{az+b}{cz+d}\Big|_{z=\infty} = \frac{a}{c}$ *и* $\frac{az+b}{cz+d}\Big|_{z=-\frac{d}{c}} = \infty$*;*
- *если* $c = 0$*, то* $\frac{az+b}{cz+d}\Big|_{z=\infty} = \infty$*.*

Теорема 11.13 (Общий вид конформного отображения расширенной комплексной плоскости на себя)**.** *Для того, чтобы* f *было конформным отображением расширенной комплексной плоскости на себя необходимо и достаточно, что* f *было дробно-линейным отображением.*

Доказательство. Достаточность ($\Longleftarrow$). Легко видеть, что для любого $w \in \overline{\mathbb{C}}$ уравнение

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{11.1}$$

имеет единственное решение

$$z = \frac{b-dw}{cw-a}.$$

Отсюда следует, что дробно-линейное отображение взаимно-однозначно отображает расширенную комплексную плоскость на себя. Кроме того, легко видеть, что дробно-линейная функция (11.1) регулярна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ (если $c = 0$, полагаем $-\frac{d}{c} = \infty$). □

Необходимость ($\Longrightarrow$). Пусть f – конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя. Из определения 11.4 следует, что f имеет единственную особую точку в $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим эту особую точку через z_0. Из теоремы 11.5 следует, что f имеет в точке z_0 полюс первого порядка.

Рассмотрим случай, когда $z_0 \neq \infty$. Обозначим вычет функции f в точке z_0 через A. Тогда функция

$$g(z) = f(z) - \frac{A}{z - z_0}$$

регулярна во всей расширенной комплексной плоскости и, следовательно, ограничена. Теперь из теоремы 3.24 (теорема Лиувилля) следует, что $g \equiv C$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Отсюда получим, что

$$f(z) = g(z) + \frac{A}{z - z_0} = C + \frac{A}{z - z_0} = \frac{Cz + A - Cz_0}{z - z_0}.$$

Таким образом, f – дробно-линейное отображение.

В случае, если $z_0 = \infty$, функция f имеет единственную особую точку на бесконечности. При этом из теоремы 11.5 следует, что ряд Лорана функции f в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = Az + O(1), \quad z \to \infty.$$

Отсюда и из теоремы 3.25 (обобщенная теорема Лиувилля) следует, что f – линейная функция. □

Теорема 11.14 (Круговое свойство дробно-линейных отображений)**.** *При дробно-линейном отображении образ любой окружности или прямой является окружностью или прямой.*

Доказательство. Пусть дробно-линейное отображение имеет вид (11.1). Если $c = 0$, то отображение (11.1) линейно и, следовательно, является композицией сдвига, поворота и растяжения. Каждое из указанных преобразований отображает окружность в окружность и прямую в прямую.

Пусть теперь $c \neq 0$. Тогда отображение (11.1) можно переписать в виде

$$f(z) = \frac{A}{z - z_0} + C. \tag{11.2}$$

Из (11.2) следует, что f является композицией сдвига, инверсии, поворота, растяжения и снова сдвига. Таким образом, для завершения доказательства достаточно доказать, что при инверсии

$$w = \frac{1}{z} \tag{11.3}$$

образ любой окружности или прямой является окружностью или прямой.

Заметим, что уравнение любой прямой или окружности в $\mathbb{C}$ можно записать в виде

$$az\bar{z} + Dz + \overline{Dz} + b = 0, \tag{11.4}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и $D \in \mathbb{C}$. При $a = 0$ (11.4) является уравнением прямой, а при $a \neq 0$ – уравнением окружности.

Инверсия (11.3) преобразует уравнение (11.4) к виду

$$a + D\bar{w} + \bar{D}w + bw\bar{w} = 0. \tag{11.5}$$

Уравнение (11.5), также как и (11.4), является уравнением прямой или окружности. □

Определение 11.15 (Симметричные точки относительно окружности)**.** *Говорят, что z_1 и z_2 – симметричные точки относительно окружности $|z - z_0| = R$, если*

(1) *точки z_1 и z_2 лежат на одном луче, начинающимся в точке z_0;*
(2) $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$*;*

- *точка z_0 считается симметричной точке ∞.*

Теорема 11.16 (Свойства симметричных точек при дробно-линейных отображениях)**.** *Пусть*

- f *– дробно-линейное отображение;*
- γ *– окружность или прямая;*
- z_1 *и* z_2 *– симметричные точки относительно* γ*;*
- Γ *– образ* γ *при отображении* f*;*
- $w_1 = f(z_1)$ *и* $w_2 = f(z_2)$*.*

Тогда w_1 *и* w_2 *– симметричные точки относительно* Γ*.*

Доказательство. Без доказательства. □

11.5. Конформные отображения единичного круга на себя.

Теорема 11.17 (Общий вид конформного отображения единичного круга на себя)**.** *Пусть*

- f *– конформное отображение единичного круга* $D = \{z \mid |z| < 1\}$ *на себя.*

Тогда существуют $z_0 \in D$ *и* $\varphi \in (-\pi, \pi]$ *такие, что*

$$\forall\ z \in D \quad f(z) = e^{i\varphi}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \tag{11.6}$$

Доказательство. Из того, что f – конформное отображение единичного круга D на себя, следует, что найдется точка $z_0 \in D$ такая, что $f(z_0) = 0$. Положим $\varphi = \arg f'(z_0)$.

Из теоремы 11.10 (теорема Римана) следует, что существует единственное конформное отображение f единичного круга D на себя такое, что

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \varphi. \tag{11.7}$$

Таким образом, для доказательства теоремы необходимо показать, что f, определяемое формулой (11.6), конформно отображает единичный круг D на себя и, кроме того, удовлетворяет условию (11.7).

Выполнение условий (11.7) следует из очевидного равенства

$$f'(z_0) = e^{i\varphi}\frac{1}{1 - |z_0|^2}.$$

Проверим теперь, что f, определяемое формулой (11.6), конформно отображает единичный круг D на себя. Из теоремы 11.13 следует, что формула (11.6) определяет конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя. Далее, точки z_0 и $\bar{z_0}^{-1}$ симметричны относительно окружности $\gamma = \{z \mid |z| = 1\}$, причем

$$f(z_0) = 0, \quad f\left(\bar{z_0}^{-1}\right) = \infty.$$

Отсюда и из теоремы 11.16 следует, что образом окружности γ при дробно-линейном отображении (11.6) является окружность Γ с центром в начале координат. Для того чтобы выяснить радиус окружности Γ, заметим, что

$$|f(1)| = \left|e^{i\varphi}\frac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0}\right| = \frac{|1 - z_0|}{|1 - \bar{z}_0|} = 1.$$

Следовательно, Γ – окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Для завершения доказательства осталось вспомнить, что отображение (11.6) конформно отображает расширенную комплексную плоскость на себя и, следовательно, конформно отображает внутренность окружности γ на внутренность окружности Γ. □

12. Физические приложения конформных отображений

12.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Теорема 12.1 (Теорема существования и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа)**.** *Пусть*

- D *– область (возможно, неограниченная) в* $\mathbb{R}^2$ *с кусочно-гладкой границей* γ*;*
- u_0 *– кусочно-непрерывная функция на* γ*;*
- E *– (конечное) множество точек разрыва функции* u_0*.*

Тогда существует единственное решение u *задачи*

$$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D} \setminus E), \tag{12.1}$$

$$\forall\ (x,y) \in D \quad \Delta u(x,y) = 0, \quad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^y}, \tag{12.2}$$

$$\forall\ (x,y) \in \gamma \setminus E \quad u(x,y) = u_0(x,y), \tag{12.3}$$

$$\exists\ C > 0\ :\ \forall\ (x,y) \in D \quad |u(x,y)| \leqslant C. \tag{12.4}$$

Задачу (12.1) – (12.4) *называют задачей Дирихле для уравнения Лапласа.*

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 12.2 (Формула Пуассона для решения задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| < 1\}$, $\overline{D} = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$*;*
- u *– вещественно-значная функция, заданная на* $\overline{D}$*;*
- $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$*;*
- $\forall\ z \in D \quad \Delta u(z) = 0$*.*

Тогда справедлива формула Пуассона

$$\forall\ re^{i\varphi} \in D \quad u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}\, d\theta. \tag{12.5}$$

Доказательство. Из теоремы 2.17 следует, что найдется гармоническая функция v в круге D такая, что $f = u + iv \in \mathcal{H}(D)$. Фиксируем произвольную точку $z_0 = re^{i\varphi}$ в области D. Из теоремы 11.17 следует, что функция

$$\forall\ z \in D \quad g(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

осуществляет конформное отображение круга D на себя, причем $g(z_0) = 0$. Следовательно, $f \circ g^{-1} \in \mathcal{H}(D)$ и $f \circ g^{-1}(0) = f(z_0)$.

Легко видеть, что $U = \operatorname{Re}(f \circ g^{-1})$ – гармоническая функция, непрерывная вплоть до границы. Применяя к ней теорему 3.16 (теорема о среднем для гармонических функций), получим, что

$$u(z_0) = U(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} U(e^{i\psi})\, d\psi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u \circ g^{-1}(e^{i\psi})\, d\psi = \left[e^{i\psi} = g(e^{i\theta})\right] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{g'(e^{i\theta})}{g(e^{i\theta})} e^{i\theta}\, d\theta.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\frac{g'(e^{i\theta})}{g(e^{i\theta})}e^{i\theta} = \left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)z\Big|_{z=e^{i\theta}} = \Big(\ln g(z)\Big)'z\Big|_{z=e^{i\theta}} = \Big(\ln(z-z_0) - \ln(1-\overline{z_0}z)\Big)'z\Big|_{z=e^{i\theta}} =$$
$$= \Big(\frac{1}{z-z_0} + \frac{\overline{z_0}}{1-\overline{z_0}z}\Big)z\Big|_{z=e^{i\theta}} = \frac{1-|z_0|^2}{(z-z_0)(1-\overline{z_0}z)}\,z\Big|_{z=e^{i\theta}} = \frac{1-|z_0|^2}{1-z\overline{z_0}-\frac{z_0}{z}+|z_0|^2}\Big|_{z=e^{i\theta}} =$$
$$= \frac{1-r^2}{1-re^{i\theta-i\varphi}-re^{i\varphi-i\theta}+r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}.\ \square$$

Теорема 12.3 (Конформная инвариантность уравнения Лапласа). *Пусть*

- D *и* D_* *– односвязные области в* $\mathbb{C}$*;*
- u *– гармоническая функция в* D*;*
- g *– конформное отображение области* D_* *на область* D*.*

Тогда $u\circ g$ *– гармоническая функция в* D_**.*

Доказательство. Из теоремы 2.17 следует, что существует регулярная функция f в области D такая, что $\operatorname{Re} f = u$. Из теоремы 2.7 получим, что $f\circ g \in \mathcal{H}(D_*)$. Отсюда и из теоремы 2.14 следует, что $u\circ g = \operatorname{Re}(f\circ g)$ – гармоническая функция в D_*. $\square$

12.2. **Комплексный потенциал плоского поля.**

Определение 12.4 (Плоское поле). *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- A *– отображение из* D *в* $\mathbb{C}$*;*

Тогда говорят, что A *– плоское поле в* D *или, сокращенно, поле.*

Определение 12.5 (Соленоидальное поле). *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- $A = A_x + iA_y$ *– поле в* D*;*
- $\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$.

Тогда говорят, что A *– соленоидальное поле в области* D*.*

Определение 12.6 (Потенциальное поле). *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- $A = A_x + iA_y$ *– поле в* D*;*
- $\operatorname{rot} A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$.

Тогда говорят, что A *– потенциальное поле в области* D*.*

Определение 12.7 (Гармоническое поле). *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- $A = A_x + iA_y$ *– поле в* D*;*
- A *– соленоидальное поле;*
- A *– потенциальное поле.*

Тогда говорят, что A *– гармоническое поле в области* D*.*

Теорема 12.8 (Комплексный потенциал плоского поля). *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- A *– гармоническое поле в* D*.*

Тогда существует $f \in \mathcal{H}(D)$ *такая, что*

$$\forall\ z \in D \quad A(z) = \overline{f'(z)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\forall\ z \in D \quad g(z) = \overline{A(z)} = A_x(x,y) - iA_y(x,y).$$

Из потенциальности и соленоидальности поля A следует, что функция g удовлетворяет условиям Коши-Римана и, следовательно, $g \in \mathcal{H}(D)$.

Из теоремы 3.10 следует, что g имеет первообразную в области D. Более точно,

$$\exists\ f \in \mathcal{H}(D)\ :\ \forall\ z \in D\ f'(z) = g(z).$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\forall\ z \in D \quad A(z) = \overline{g(z)} = \overline{f'(z)}.\ \square$$

Определение 12.9 (Комплексный потенциал поля)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- A *– гармоническое поле в* D*;*
- $f \in \mathcal{H}(D)$ *такая, что* $A = \overline{f'}$ *в области* D*.*

Тогда говорят, что f *– комплексный потенциал поля* A*.*

Определение 12.10 (Траектория поля)**.** *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- A *– гармоническое поле в* D*;*
- $z : [t_1, t_2] \longrightarrow D$ *– решение уравнения*

$$\forall\ t \in [t_1, t_2] \quad \frac{dz(t)}{dt} = A(z(t)).$$

Тогда говорят, что $z(\cdot)$ *– траектория поля* A*.*

Определение 12.11 (Эквипотенциальные линии поля)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- A *– гармоническое поле в* D*;*
- $f = u + iv$ *– комплексный потенциал поля* A*.*

Тогда любую линию уровня функции u *(т. е. кривую, удовлетворяющую уравнению* $u = C$*, где* C *– некоторая постоянная) называют эквипотенциальной линией поля* A*.*

Теорема 12.12 (Основное свойство эквипотенциальных линий)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- A *– гармоническое поле в* D*;*
- $f = u + iv$ *– комплексный потенциал поля* A*;*
- $z_1 \in D$*,* $z_2 \in D$ *лежат на одной эквипотенциальной линии поля* A *(т. е.* $u(z_1) = u(z_2)$*);*
- γ *– кусочно-гладкая кривая в* D*, соединяющая точки* z_1 *и* z_2*.*

Тогда работа поля A *по перемещению точки вдоль кривой* γ *равна нулю. Более точно,*

$$\int\limits_{\gamma} A_x\,dx + A_y\,dy = 0.$$

Доказательство. Из того, что $f = u + iv$ – комплексный потенциал поля A можно вывести, что

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_\gamma A_x\,dx + A_y\,dy = \int\limits_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \int\limits_\gamma du = u(z_2) - u(z_1) = 0. \ \square$$

Определение 12.13 (Линия тока поля). *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- A *– гармоническое поле в* D*;*
- $f = u + iv$ *– комплексный потенциал поля* A*.*

Тогда любую линию уровня функции v *называют линией тока поля* A*.*

Теорема 12.14 (Основное свойство линий тока). *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- A *– гармоническое поле в* D*;*
- $f = u + iv$ *– комплексный потенциал поля* A*;*
- $z : [t_1, t_2] \longrightarrow D$ *– траектория поля* A*.*

Тогда

$$\exists\, C \in \mathbb{R} \ : \ \forall\, t \in [t_1, t_2] \quad v(z(t)) = C.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\forall\, t \in [t_1, t_2] \quad \frac{d\,\mathrm{Im}\Big(f(z(t))\Big)}{dt} = \mathrm{Im}\left(\frac{df(z(t))}{dt}\right) = \mathrm{Im}\left(f'(z(t))\,z'(t)\right) = \mathrm{Im}\left(f'(z(t))\,A(z(t))\right) =$$
$$= \mathrm{Im}\left(f'(z(t))\,\overline{f'(z(t))}\right) = \mathrm{Im}\left(|f'(z(t))|^2\right) = 0 \ \square$$

12.3. **Поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости.** Рассмотрим стационарное плоско-параллельное течение идеальной несжимаемой жидкости в области $D \subset \mathbb{C}$. Пусть $V = V_x + iV_y$ – поле скоростей рассматриваемой жидкости. Известно, что поле скоростей V удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\mathrm{div}\, V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

и уравнению несжимаемости

$$\mathrm{rot}\, V = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0.$$

Из теоремы 12.8 следует, что существует комплексный потенциал f поля скоростей V.

Теорема 12.15 (Комплексный потенциал для бесконечно глубокого плоско-параллельного потока идеальной несжимаемой жидкости). *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\mathbb{C}$*;*
- *граница* γ *области* D *положительно ориентирована относительно* D*;*
- γ *содержит бесконечно удаленную точку;*
- γ *– гладкая кривая в* $\overline{\mathbb{C}}$*;*
- *в окрестности бесконечно удаленной точки* γ *является прямой;*

- $V_\infty > 0$.

Тогда существует единственное гармоническое поле скоростей V такое, что

(1) *поле V обтекает кривую γ (т. е. γ является линией тока поля V) в направлении заданном ориентацией на γ;*
(2) *поле V равномерно ограничено в области D;*
(3) $|V(z)| = V_\infty + o(1)$ *при* $D \ni z \to \infty$.

Кроме того, существует комплексный потенциал f поля скоростей V, удовлетворяющий следующим условиям[4]

(1) *f – конформное отображение области D на полуплоскость* $\Pi_+ = \{w \mid \operatorname{Im} w > 0\}$;
(2) $f(\infty) = \infty$;
(3) $|f'(z)| = V_\infty + o(1)$ *при* $D \ni z \to \infty$.

Идея доказательства. Обсудим идею доказательства существования комплексного потенциала f, удовлетворяющего условиям теоремы. Из теоремы 11.10 (теорема Римана) следует, что существует конформное отображение f области D на верхнюю полуплоскость $\Pi_+ = \{w \mid \operatorname{Im} w > 0\}$. При этом f определено с точностью до произвольного выбора трех вещественных постоянных. Выбирая эти постоянные подходящим образом, всегда можно удовлетворить двум условиям (2) и (3). Заметим, что при этом останется возможным произвольным образом фиксировать третью вещественную постоянную. Этот произвол связан инвариантностью верхней полуплоскости относительно сдвигов вдоль оси Ox и не приводит к неоднозначному определению поля скоростей V.

Для доказательства существования заданного поля скоростей, достаточно проверить, что поле скоростей V, построенное по комплексному потенциалу f, удовлетворяет условиям теоремы. Из того, что образом границы γ является вещественная ось следует, что

$$\forall\, z \in \gamma \quad v(z) = \operatorname{Im} f(z) = 0.$$

Таким образом, γ – линия тока поля V.

Равномерная ограниченность поля V является не вполне тривиальным фактом и на ее доказательстве мы останавливаться не будем. Отметим лишь, что равномерная ограниченность поля V следует из гладкости границы γ (для негладких границ поле V может оказаться неограниченным (см. пример 12.16)).

Из $|f'(z)| = V_\infty + o(1)$ следует, что $|V(z)| = V_\infty + o(1)$ при $D \ni z \to \infty$.

Утверждение о единственности поля скоростей V оставим без доказательства. □

Пример 12.16. *Найти поле скоростей V идеальной несжимаемой жидкости в области*

$$D = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid z = iy,\ y \in (0, h)\},$$

где $h > 0$, удовлетворяющую условию $|V(z)| = V_\infty + o(1)$ при $D \ni z \to \infty$, где $V_\infty > 0$, и обтекающее границу области D в направлении от $-\infty$ к $+\infty$.

Решение. Построим конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость Π_+. Отображение

$$z_1 = z^2, \quad z \in D$$

конформно отображает область D на область

$$D_1 = \mathbb{C} \setminus \{z_1 \mid z_1 = x_1,\ x_1 \in (-h^2, +\infty)\}.$$

[4]Отметим, что комплексный потенциал определяется с точностью до прибавления произвольной постоянной.

Отображение

$$z_2 = z_1 + h^2, \quad z_1 \in D_1$$

конформно отображает область D_1 на область

$$D_2 = \mathbb{C} \setminus \{z_2 \mid z_2 = x_2,\ x_2 \in (0, +\infty)\}.$$

Отображение

$$z_3 = \sqrt{z_2}, \quad z_2 \in D_2,$$

где выбрана ветвь корня, удовлетворяющая условию $\sqrt{-1} = i$, конформно отображает область D_2 на верхнюю полуплоскость Π_+. Заметим, что полученное отображение области D на Π_+ переводит ∞ в ∞. Общее отображение верхней полуплоскости Π_+ на себя можно записать в виде

$$w = az_3 + b, \quad z_3 \in \Pi_+,$$

где $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$.

Таким образом, функция

$$w = f(z) = a\sqrt{z^2 + h^2} + b, \quad z \in D$$

конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость Π_+. легко видеть, что

$$f'(z) = a + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \longrightarrow \infty.$$

Полагая $a = V_\infty$ и $b = 0$ (выбор b не влияет на поле скоростей V) найдем комплексный потенциал поля V

$$f(z) = V_\infty\sqrt{z^2 + h^2}, \quad z \in D.$$

Отсюда и из теоремы 12.15 следует, что

$$V(z) = \overline{f'(z)} = V_\infty\overline{\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + h^2}}\right)}, \quad z \in D. \tag{12.6}$$

Из (12.6) следует, что скорость потока при приближении к точке $z = ih$ стремится к бесконечности, в то время как при приближении к $z = 0$ скорость потока стремится к нулю. □

12.4. **Поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости (дополнение).**

Определение 12.17 (Поток плоского поля через замкнутый контур)**.** *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*
- $A = A_x + iA_y$ *– поле в* D*;*
- γ *– гладкий замкнутый контур в* D *положительно ориентированный относительно своей внутренности;*
- $n = n_x + n_y$ *– единичная внешняя нормаль к* γ*.*

Потоком поля A *через контур* γ *в направлении внешней нормали* n *называют число*[5]

$$\mathbf{N} = \oint\limits_\gamma A_x\,dy - A_y\,dx.$$

Определение 12.18 (Циркуляция плоского поля вдоль замкнутого контура)**.** *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$*;*

[5]Это определение эквивалентно классическому: $\mathbf{N} = \oint\limits_\gamma (A, n)\,dl$, где $(A, n) = A_x n_x + A_y n_y$ – скалярное произведение векторов A и n.

- $A = A_x + iA_y$ – *поле в* D*;*
- γ – *гладкий замкнутый ориентированный контур в* D*;*
- $\tau = \tau_x + \tau_y$ – *единичный касательный вектор к* γ*, согласованный с ориентацией на* γ*.*

Циркуляцией поля A *вдоль контура* γ *в направлении заданном ориентацией на* γ *называют число*[6]

$$\mathbf{\Gamma} = \oint\limits_{\gamma} A_x\,dx + A_y\,dy.$$

Теорема 12.19 (Эквивалентное определение потока и циркуляции плоского поля через замкнутый контур)**.** *Пусть*

- D – *область в* $\mathbb{C}$*;*
- $A = A_x + iA_y$ – *поле в* D*;*
- γ – *гладкий замкнутый контур в* D *положительно ориентированный относительно своей внутренности;*
- $n = n_x + n_y$ – *единичная внешняя нормаль к* γ*;*
- $\mathbf{N}$ – *поток поля* A *через контур* γ *в направлении внешней нормали* n*;*
- $\mathbf{\Gamma}$ – *циркуляция поля* A *вдоль контура* γ *в направлении заданном ориентацией на* γ*.*

Тогда

$$\mathbf{\Gamma} = \operatorname{Re}\left(\oint\limits_{\gamma} \overline{A(z)}\,dz\right), \quad \mathbf{N} = \operatorname{Im}\left(\oint\limits_{\gamma} \overline{A(z)}\,dz\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\oint\limits_{\gamma} \overline{A(z)}\,dz = \oint\limits_{\gamma} (A_x - iA_y)\,(dx + i\,dy) = \oint\limits_{\gamma} A_x\,dx + A_y\,dy + i\oint\limits_{\gamma} A_x\,dy - A_y\,dx = \mathbf{\Gamma} + i\mathbf{N}.$$

Отсюда и из включений $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{N} \in \mathbb{R}$ следует необходимое утверждение. $\square$

Теорема 12.20 (Выражение потока и циркуляции гармонического поля через его комплексный потенциал)**.** *Пусть*

- D – *область в* $\mathbb{C}$*;*
- $A = A_x + iA_y$ – *гармоническое поле в* D*;*
- f – *комплексный потенциал поля* A*;*
- γ – *гладкий замкнутый контур в* D *положительно ориентированный относительно своей внутренности;*
- $\mathbf{N}$ – *поток поля* A *через контур* γ *в направлении внешней нормали;*
- $\mathbf{\Gamma}$ – *циркуляция поля* A *вдоль контура* γ *в направлении заданном ориентацией на* γ*.*

Тогда

$$\mathbf{\Gamma} + i\mathbf{N} = \oint\limits_{\gamma} f'(z)\,dz.$$

Доказательство. Введем обозначение $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Из определения комплексного потенциала следует, что

$$f'(z) = A_x - iA_y.$$

[6] Это определение эквивалентно классическому: $\mathbf{\Gamma} = \oint\limits_{\gamma} (A, \tau)\,dl$, где $(A, \tau) = A_x\tau_x + A_y\tau_y$ – скалярное произведение векторов A и τ.

Следовательно,

$$\oint\limits_\gamma f'(z)\,dz = \oint\limits_\gamma (A_x - iA_y)\,(dx + i\,dy) = \oint\limits_\gamma A_x\,dx + A_y\,dy + i\oint\limits_\gamma A_x\,dy - A_y\,dx = \mathbf{\Gamma} + i\mathbf{N}.\ \square$$

Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и A – гармоническое поле в D. Из доказательства теоремы 12.8 (комплексный потенциал плоского поля) следует, что $\overline{A}$ – регулярная функция в области D. Пусть теперь z_0 – изолированная особая точка функции $\overline{A}$. Следовательно, в окрестности точки z_0 она может быть разложена в ряд Лорана вида

$$\overline{A(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{12.7}$$

Предположим, что $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$, где ε – достаточно малое число и γ – ориентирован положительно относительно своей внутренности. Из теорем 6.15 (теорема о вычетах) и 12.19 получим, что

$$\mathbf{\Gamma} + i\mathbf{N} = \oint\limits_\gamma \overline{A(z)}\,dz = 2\pi i c_{-1}. \tag{12.8}$$

Из (12.8) следует, что в ряде (12.7) вклад в поток и циркуляцию в окрестности точки z_0 дает единственный член вида $\frac{c_{-1}}{z - z_0}$.

Определение 12.21 (Поле точечного вихреисточника)**.** *Полем точечного вихреисточника, сосредоточенного в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, с интенсивностью потока $\mathbf{N}$ и интенсивностью вихря $\mathbf{\Gamma}$ называют поле с потенциалом вида*

$$A(z) = \frac{\mathbf{N} + i\mathbf{\Gamma}}{2\pi}\overline{\frac{1}{z - z_0}}.$$

Теорема 12.22 (Потенциал точечного вихреисточника)**.** *Пусть*

- $z_0 \in \mathbb{C}$*;*
- A *– поле точечного вихреисточника вида*

$$A(z) = \frac{\mathbf{N} + i\mathbf{\Gamma}}{2\pi}\overline{\frac{1}{z - z_0}}.$$

Тогда

(1) *при $\mathbf{N} + i\mathbf{\Gamma} \neq 0$ поле A не имеет комплексного потенциала регулярного в $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$;*
(2) *поле A имеет* многозначный *комплексный потенциал в $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ вида*

$$f(z) = \frac{\mathbf{N} - i\mathbf{\Gamma}}{2\pi}\operatorname{Ln}(z - z_0) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Доказательство. Следует из того, что $\operatorname{Ln}(z - z_0)$ – регулярная многозначная функция, любая регулярная ветвь $\ln(z - z_0)$ которой, удовлетворяет условию $(\ln(z - z_0))' = \frac{1}{z - z_0}$. $\square$.

Теорема 12.23 (Формула Чаплыгина)**.** *Пусть*

- D_* *– ограниченная односвязная область (например, крыло самолета);*
- $D = \mathbb{C} \setminus \overline{D_*}$*;*
- γ *– граница области D, положительно ориентированная относительно D;*

- *V – поле скоростей стационарного плоско-параллельного течения идеальной несжимаемой жидкости (при скоростях существенно меньших скорости звука, воздух можно считать идеальной несжимаемой жидкостью) в области D;*
- *поле скоростей V обтекает контур γ;*
- *ρ – плотность жидкости;*
- *$\mathbf{P}$ – подъемная сила, действующая на контур γ (или, например, на крыло самолета D_*) со стороны жидкости (действием сил тяжести пренебрегаем).*

Тогда

$$\mathbf{P} = -\frac{i\rho}{2}\oint\limits_{\gamma} |V(z)|^2\,dz, \quad \overline{\mathbf{P}} = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_{\gamma} (\overline{V(z)})^2\,dz. \tag{12.9}$$

Вместе с этим, если существует комплексный потенциал f поля скоростей V, справедлива формула Чаплыгина

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_{\gamma} (f'(z))^2\,dz. \tag{12.10}$$

Доказательство. Следует из классической формулы Бернулли

$$P + \frac{\rho}{2}|V|^2 = C,$$

где P – давление и C – некоторая постоянная. Мы позволим себе оставить это утверждение без доказательства (см., например, [2]). □

Теорема 12.24 (Формула Жуковского)**.** *Пусть*

- *D_* – ограниченная односвязная область;*
- *$D = \mathbb{C} \setminus \overline{D_*}$;*
- *V – поле скоростей стационарного плоско-параллельного течения идеальной несжимаемой жидкости в области D;*
- *поле V обтекает границу γ области D (т. е. γ является линией тока поля V);*
- *$V(z) = V_\infty + o(1)$ при $z \to \infty$, где $V_\infty \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;*
- *поток $\mathbf{N}$ поля V сквозь любой контур охватывающий D_* равен нулю (другими словами, в области D_* и на ее границе нет никаких источников);*
- *$\mathbf{\Gamma}$ – циркуляция поля V вдоль любого контура охватывающего D_*;*
- *$\mathbf{P}$ – подъемная сила.*

Тогда

$$\mathbf{P} = -i\rho\mathbf{\Gamma}V_\infty.$$

Доказательство. Функция $\overline{V(z)}$ является регулярной функций в окрестности бесконечности и, следовательно, может быть разложена в ряд Лорана в окрестности бесконечности. Отсюда, учитывая предположение о поведении функции V на бесконечности, получим, что

$$\overline{V(z)} = \overline{V_\infty} + \frac{c_{-1}}{z} + \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n$$

при достаточно больших z.

Из предположений, что $\mathbf{N} = 0$ и $\mathbf{\Gamma}$ – циркуляция поля V вдоль любого контура охватывающего D_* получим, что

$$\overline{V(z)} = \overline{V_\infty} + \frac{\mathbf{\Gamma}}{2\pi i}\frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n.$$

Отсюда и из теоремы 12.23 получим, что

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_{\gamma}(\overline{V(z)})^2\,dz = \frac{i\rho}{2}(-2\pi i)\operatorname*{res}_{\infty}(\overline{V(z)})^2 = \frac{i\rho}{2}(-2\pi i)\frac{\boldsymbol{\Gamma}\overline{V_\infty}}{\pi i} = i\rho\boldsymbol{\Gamma}\overline{\mathbf{V}_\infty}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P} = -i\rho\boldsymbol{\Gamma}V_\infty. \ \square$$

Замечание 12.25 (Парадокс нулевого лобового сопротивления)**.** *Из теоремы* 12.24 *следует, что при обтекании цилиндра произвольной формы потоком идеальной несжимаемой жидкости, отсутствует сила лобового сопротивления. Вместе с этим, при бесциркуляционном обтекании цилиндра произвольной формы потоком идеальной несжимаемой жидкости, отсутствуют какие-либо силы, действующие со стороны жидкости на цилиндр.*

Теорема 12.26 (Комплексный потенциал бесциркуляционного обтекание ограниченной односвязной области)**.** *Пусть*

- D_* *– ограниченная односвязная область;*
- $D = \mathbb{C} \setminus \overline{D_*}$*;*
- V *– поле скоростей стационарного плоско-параллельного течения идеальной несжимаемой жидкости в области* D*;*
- *поле* V *обтекает границу* γ *области* D *(т. е.* γ *является линией тока поля* V*);*
- $V(z) = V_\infty + o(1)$ *при* $z \to \infty$*, где* $V_\infty \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*;*
- *поток* $\mathbf{N}$ *поля* V *сквозь любой контур охватывающий* D_* *равен нулю (другими словами, в области* D_* *и на ее границе нет никаких источников);*
- *циркуляция* $\boldsymbol{\Gamma}$ *поля* V *вдоль любого контура охватывающего* D_* *равна нулю.*

Тогда

(1) *существует комплексный потенциал* f *поля* V*;*
(2) *комплексный потенциал* f *определен с точностью до прибавления произвольной постоянной;*
(3) *комплексный потенциал* f *осуществляет конформное отображение области* D *на внешность некоторого отрезка параллельного оси* u *(имеется в виду, что* $f : z \mapsto w = u+iv$*).*

Доказательство. Без доказательства. $\square$

Теорема 12.27 (Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра)**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| > R\}$*, где* $R > 0$*;*
- V *– поле скоростей стационарного плоско-параллельного течения идеальной несжимаемой жидкости в области* D *(действием сил тяжести пренебрегаем);*
- *поле* V *обтекает границу* γ *области* D *(т. е.* γ *является линией тока поля* V*);*
- $V_\infty \in \mathbb{C}$*;*
- $V(z) = V_\infty + o(1)$ *при* $z \to \infty$*, где* $V_\infty \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*;*
- *поток* $\mathbf{N}$ *поля* V *сквозь любой контур охватывающий* D_* *равен нулю (другими словами, в области* D_* *и на ее границе нет никаких источников);*
- *циркуляция* $\boldsymbol{\Gamma}$ *поля* V *вдоль любого контура охватывающего* D_* *равна нулю.*

Тогда

$$f(z) = \overline{V_\infty}\,z + \frac{V_\infty R^2}{z}$$

является многозначным комплексным потенциалом поля V*.*

Доказательство. Следует из теоремы 12.26. □

Теорема 12.28 (Обтекание круглого цилиндра потоком с ненулевой циркуляцией). *Пусть*

- $D = \{z \mid |z| > R\}$, *где* $R > 0$;
- V – *поле скоростей стационарного плоско-параллельного течения идеальной несжимаемой жидкости в области* D *(действием сил тяжести пренебрегаем);*
- *поле* V *обтекает границу* γ *области* D *(т. е.* γ *является линией тока поля* V*);*
- $V_\infty \in \mathbb{C}$;
- $V(z) = V_\infty + o(1)$ *при* $z \to \infty$, *где* $V_\infty \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- *поток* $\mathbf{N}$ *поля* V *сквозь любой контур охватывающий* D_* *равен нулю (другими словами, в области* D_* *и на ее границе нет никаких источников);*
- $\mathbf{\Gamma}$ – *циркуляция поля* V *вдоль любого контура охватывающего* D_*.

Тогда

$$f(z) = \overline{V_\infty}\, z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\mathbf{\Gamma}}{2\pi i} \operatorname{Ln} z$$

является многозначным комплексным потенциалом поля V.

Доказательство. Заметим, что поле, отвечающее многозначному комплексному потенциалу $C \operatorname{Ln} z$, при любом $C \in \mathbb{C}$ обтекает контур γ. Отсюда и из теорем 12.22 и 12.27 следует, что многозначный комплексный потенциал

$$f(z) = \overline{V_\infty}\, z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\mathbf{\Gamma}}{2\pi i} \operatorname{Ln} z$$

отвечает всем условиям настоящей теоремы. □

Теорема 12.29 (Обтекание цилиндра произвольной формы потоком с ненулевой циркуляцией).

- D_* – *ограниченная односвязная область;*
- $D = \mathbb{C} \setminus \overline{D_*}$;
- V – *поле скоростей стационарного плоско-параллельного течения идеальной несжимаемой жидкости в области* D*;*
- *поле* V *обтекает границу* γ *области* D *(т. е.* γ *является линией тока поля* V*);*
- $V(z) = V_\infty + o(1)$ *при* $z \to \infty$, *где* $V_\infty \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- *поток* $\mathbf{N}$ *поля* V *сквозь любой контур охватывающий* D_* *равен нулю (другими словами, в области* D_* *и на ее границе нет никаких источников);*
- $\mathbf{\Gamma}$ – *циркуляция поля* V *вдоль любого контура охватывающего* D_**;*
- g – *конформное отображение области* D *на область* $\{w \mid |w| > R\}$ *при некотором* $R > 0$, *удовлетворяющее условиям* $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = 1$.

Тогда

$$f(z) = \overline{V_\infty}\, g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\mathbf{\Gamma}}{2\pi i} \operatorname{Ln} g(z)$$

является многозначным комплексным потенциалом поля V.

Доказательство. Без доказательства. □

12.5. **Электростатическое поле.** Рассмотрим плоско-параллельное электростатическое поле в среде с постоянной относительной диэлектрической проницаемостью, не содержащей ни электрических зарядов, ни переменного магнитного поля. В этом случае электростатическое поле может быть описано двумерным вектором, зависящим от двух декартовых координат. Пусть

$E = E_x + iE_y$ – напряженность электрического поля в ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$. Известно, что поле E подчиняется закону Гаусса

$$\operatorname{div} E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

и закону индукции Фарадея

$$\operatorname{rot} E = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Из теоремы 12.8 следует, что существует комплексный потенциал f для напряженности электрического поля E.

Напомним, что для вектора напряженности вводится электростатический потенциал φ по формуле $E = -\operatorname{grad}\varphi$. В нашем случае последнее соотношение может быть переписано в виде

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Учитывая, что

$$E = \overline{f'} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y},$$

найдем связь между потенциалом φ и комплексным потенциалом f

$$\exists\, C \in \mathbb{R} \ : \ \varphi = -u + C.$$

Теорема 12.30 (Комплексный потенциал плоско-параллельного электростатического поля)**.** *Пусть*

- D *– односвязная область в* $\overline{\mathbb{C}}$*;*
- *граница области* D *состоит из двух кусочно-гладких кривых* γ_1 *и* γ_2*;*
- $\varphi_1 \in \mathbb{R}$, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ *и* $\varphi_1 < \varphi_2$.

Тогда существует единственное электростатическое поле E *такое, что*

(1) φ *– электростатический потенциал поля* E*;*
(2) $\varphi|_{\gamma_1} = \varphi_1$, $\varphi|_{\gamma_2} = \varphi_2$*;*
(3) *потенциал* φ *равномерно ограничен в области* D.

Кроме того, существует комплексный потенциал f *электростатического поля* E*, удовлетворяющий следующим условиям*

(1) f *– конформное отображение области* D *на полосу* $\Pi = \{w \mid -\varphi_2 < \operatorname{Re} w < -\varphi_1\}$*;*
(2) $f(\gamma_1) = \{w \mid \operatorname{Re} w = -\varphi_1\}$*;*
(3) $f(\gamma_2) = \{w \mid \operatorname{Re} w = -\varphi_2\}$.

Идея доказательства. По аналогии с доказательством теоремы 12.15. □

Пример 12.31. *Найти напряженность* E *электростатического поля и его потенциал* φ *в круге*

$$D = \{z \mid |z| < 1\},$$

удовлетворяющие граничным условиям

- $\varphi|_{\gamma_1} = 0$, *где* $\gamma_1 = \{z \mid |z| = 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$*;*
- $\varphi|_{\gamma_2} = 1$, *где* $\gamma_2 = \{z \mid |z| = 1,\ \operatorname{Im} z < 0\}$.

Решение. Построим конформное отображение области D на полосу $\Pi = \{w \mid -1 < \operatorname{Re} w < 0\}$. Отображение

$$z_1 = \frac{z-1}{z+1}, \quad z \in D$$

конформно отображает область D на область

$$D_1 = \{z_1 \mid \operatorname{Re} z_1 < 0\}.$$

Отображение

$$z_2 = -iz_1, \quad z_1 \in D_1$$

конформно отображает область D_1 на область

$$D_2 = \{z_2 \mid \operatorname{Im} z_2 > 0\}.$$

Отображение

$$z_3 = \ln z_2, \quad z_2 \in D_2,$$

где выбрана ветвь логарифма, удовлетворяющая условию $\ln i = i\frac{\pi}{2}$, конформно отображает область D_2 на область

$$D_3 = \{z_3 \mid 0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi\}.$$

Отображение

$$w = i\frac{z_3}{\pi}, \quad z_3 \in D_3$$

конформно отображает область D_3 на полосу Π. Таким образом, функция

$$w = f(z) = \frac{i}{\pi} \ln\left(-i\,\frac{z-1}{z+1}\right)$$

конформно отображает область D на полосу Π.

Из построения следует, что конформное отображение f удовлетворяет условиям

$$f(\gamma_1) = \{z \mid \operatorname{Re} z = 0\}, \quad f(\gamma_2) = \{z \mid \operatorname{Re} z = -1\}.$$

Отсюда и из теоремы 12.30 следует, что

$$E(z) = \overline{f'(z)} = -\frac{2i}{\pi}\ \left(\frac{\overline{z}}{\overline{z}^2 - 1}\right), \quad z \in D. \tag{12.11}$$

Из (12.11) следует, что напряженность электрического поля при приближении к точкам $z = \pm 1$ (напомним, что в этих точках потенциал φ претерпевает разрыв) стремится к бесконечности. $\square$

13. Операционное исчисление

13.1. Преобразование Лапласа.

Определение 13.1 (Преобразование Лапласа). *Пусть*

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$;
- f – *кусочно-непрерывна на* $\mathbb{R}$;
- $\forall\ t < 0\ f(t) = 0$;
- $\exists\ C > 0\ \exists\ a \in \mathbb{R}\ :\ \forall\ t \geqslant 0\ |f(t)| \leqslant Ce^{at}$.

Тогда

(1) *преобразованием Лапласа функции* f *называют функцию комплексного переменного*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt, \quad \operatorname{Re} p > a; \tag{13.1}$$

(2) *функцию* f *называют оригиналом;*
(3) *функцию* F *называют изображением оригинала* f;
(4) *для обозначения того, что* F – *изображение оригинала* f, *используют запись*

$$f(t) \doteq F(p).$$

Теорема 13.2 (Регулярность изображения). *Пусть*

- f – *оригинал;*
- $C > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\forall\ t \geqslant 0\ |f(t)| \leqslant Ce^{at}$;
- F – *изображение оригинала* f.

Тогда $F \in \mathcal{H}(D)$, *где* $D = \{p \mid \operatorname{Re} p > a\}$.

Доказательство. Пусть γ – произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая в D. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma \subset \{p \mid \operatorname{Re} p > a + \varepsilon\}$, откуда получим, что

$$\forall\ (t, p) \in \mathbb{R} \times D \quad |f(t)e^{-pt}| \leqslant Ce^{-\varepsilon t}\theta(t). \tag{13.2}$$

Из (13.2) следует, что функция двух переменных $f(t)e^{-pt}$ интегрируема на $\mathbb{R} \times \gamma$. Отсюда и из теоремы Фубини получим, что можно переставлять пределы интегрирования в интеграле

$$\oint\limits_\gamma F(p)\,dp = \oint\limits_\gamma \left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \right) dp = \int\limits_0^{+\infty} \left(\oint\limits_\gamma f(t)e^{-pt}\,dp \right) dt. \tag{13.3}$$

Учитывая, что функция e^{-pt} регулярна по переменной p во всей комплексной плоскости, из теоремы 3.3 (интегральная теорема Коши) следует, что

$$\oint\limits_\gamma e^{-pt}\,dp = 0. \tag{13.4}$$

Из (13.3) и (13.4) получим, что для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой в D верно, что

$$\oint\limits_\gamma F(p)\,dp = 0.$$

Отсюда и из теоремы 3.26 (теорема Мореры) следует, что $F \in \mathcal{H}(D)$. $\square$

Теорема 13.3 (Линейность преобразования Лапласа)**.** *Пусть*

- f *и* g *– оригиналы;*
- $f(t) \doteqdot F(p)$ *и* $g(t) \doteqdot G(p)$*;*
- $\alpha \in \mathbb{C}$ *и* $\beta \in \mathbb{C}$*.*

Тогда $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p)$*.*

Доказательство. Следует из линейности интеграла. □

Теорема 13.4 (Теорема подобия для оригинала)**.** *Пусть*

- f *– оригинал;*
- $f(t) \doteqdot F(p)$*;*
- $\alpha > 0$*.*

Тогда $f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$*.*

Доказательство.

$$f(\alpha t) \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt}\, dt = \Big[\alpha t = s\Big] = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} f(s) e^{-\frac{ps}{\alpha}}\, ds = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \square$$

Теорема 13.5 (Дифференцирование оригинала)**.** *Пусть*

- $f,\ f',\ \ldots, f^{(n)}$ *– оригиналы, где* $n \in \mathbb{N}$*;*
- $f(t) \doteqdot F(p)$*.*

Тогда

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \tag{13.5}$$

где

$$\forall\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \quad f^{(k)}(0) = \lim_{t \to +0} f^{(k)}(t).$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Интегрируя по частям, получим, что

$$f'(t) \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\, df(t) = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} + p \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt = -f(0) + pF(p).$$

Таким образом, формула (13.5) верна при $n = 1$.

Пусть теперь формула (13.5) верна при $n = m$. При $n = m + 1$ получим, что

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(t) &\doteqdot \int\limits_0^{+\infty} \left(f^{(m)}(t)\right)' e^{-pt}\, dt = p \int\limits_0^{+\infty} f^{(m)}(t) e^{-pt}\, dt - f^{(m)}(0) = \\ &= p\left(p^m F(p) - p^{m-1} f(0) - p^{m-2} f'(0) - \ldots - f^{(m-1)}(0)\right) - f^{(m)}(0) = \\ &= p^{m+1} F(p) - p^m f(0) - p^{m-1} f'(0) - \ldots - p f^{(m-1)}(0) - f^{(m)}(0). \square \end{aligned}$$

Теорема 13.6 (Дифференцирование изображения)**.** *Пусть*

- f *– оригинал;*
- $f(t) \doteqdot F(p)$*.*

Тогда $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $t^n f(t) \doteqdot (-1)^n F^{(n)}(p)$*.*

Доказательство. Дифференцируя под знаком интеграла в формуле (13.1), получим

$$F^{(n)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\frac{\partial^n}{\partial p^n}e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)(-t)^n e^{-pt}\,dt. \square$$

Теорема 13.7 (Интегрирование оригинала)**.** *Пусть*

- f – *оригинал;*
- $f(t) \doteqdot F(p)$.

Тогда $\int\limits_0^t f(s)\,ds \doteqdot \frac{F(p)}{p}$.

Доказательство. Легко видеть, что функция $g(t) = \int\limits_0^t f(s)\,ds$ является оригиналом. Полагая $g(t) \doteqdot G(p)$, из теоремы 13.5 получим, что

$$f(t) = g'(t) \doteqdot pG(p) - g(0) = pG(p).$$

Отсюда, учитывая, что $f(t) \doteqdot F(p)$, найдем, что $pG(p) = F(p)$ и, следовательно, $G(p) = \frac{F(p)}{p}$. $\square$

Теорема 13.8 (Теорема запаздывания)**.** *Пусть*

- f – *оригинал;*
- $f(t) \doteqdot F(p)$;
- $\tau > 0$.

Тогда $f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p)$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$f(t-\tau) \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}\,dt = \Big[t-\tau = s\Big] = \int\limits_{-\tau}^{+\infty} f(s)e^{-p(s+\tau)}\,ds = e^{-p\tau}\int\limits_{-\tau}^{+\infty} f(s)e^{-ps}\,ds =$$

$$= e^{-p\tau}\left(\int\limits_{-\tau}^{0} f(s)e^{-ps}\,ds + \int\limits_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}\,ds\right) = e^{-p\tau}\int\limits_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}\,ds = e^{-p\tau}F(p). \square$$

Теорема 13.9 (Теорема смещения)**.** *Пусть*

- f – *оригинал;*
- $f(t) \doteqdot F(p)$;
- $\lambda \in \mathbb{C}$.

Тогда $e^{\lambda t}f(t) \doteqdot F(p-\lambda)$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$e^{\lambda t}f(t) \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} e^{\lambda t}f(t)e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-\lambda)t}\,dt = F(p-\lambda). \square$$

Определение 13.10 (Свертка оригиналов)**.** *Сверткой оригиналов* f *и* g *называют функцию*

$$f * g(t) = \int\limits_0^t f(s)g(t-s)\,ds.$$

Теорема 13.11 (Изображение свертки). *Пусть*

- f *и* g *– оригиналы;*
- $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$.

Тогда

(1) $f * g$ *– оригинал;*
(2) $f * g(t) \doteq F(p)G(p)$.

Доказательство. (1) Из условия $\forall\ t < 0\ f(t) = 0$ следует, что $\forall\ t < 0\ f * g(t) = 0$. Из определения 13.1 следует, что

$$\exists\, C > 0\ \exists\, a \in \mathbb{R}\ :\ \forall\, t \geqslant 0\ |f(t)| \leqslant Ce^{at},\ |g(t)| \leqslant Ce^{at}.$$

Далее,

$$\forall\, t \geqslant 0 \quad |f * g(t)| \leqslant \int\limits_0^t |f(s)||g(t-s)|\, ds \leqslant C^2 \int\limits_0^t e^{as} e^{a(t-s)}\, ds = C^2\, t\, e^{at} \leqslant C^2\, e^{(a+1)t}.$$

(2) Меняя местами порядок интегрирования, и, выполняя замену переменных, получим, что

$$f * g(t) \doteq \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^t f(s)g(t-s)\, ds \right) e^{-pt}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_s^{+\infty} f(s)g(t-s)e^{-pt}\, dt \right) ds = \Big[t = x + s \Big] =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(s)g(x)e^{-p(x+s)}\, dx \right) ds = \int\limits_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}\, ds \int\limits_0^{+\infty} g(x)e^{-px}\, dx = F(p)G(p). \ \square$$

Определение 13.12 (θ-функция).

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Теорема 13.13 (Таблица оригиналов и их изображений).

- $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \quad t^n e^{\lambda t}\theta(t) \doteq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$;
- $\forall\, \omega \in \mathbb{C}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \quad e^{\lambda t} \sin(\omega t)\theta(t) \doteq \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$;
- $\forall\, \omega \in \mathbb{C}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \quad e^{\lambda t} \cos(\omega t)\theta(t) \doteq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$;
- $\forall\, \omega \in \mathbb{C}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \quad e^{\lambda t}\, \mathrm{sh}(\omega t)\theta(t) \doteq \frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$;
- $\forall\, \omega \in \mathbb{C}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \quad e^{\lambda t}\, \mathrm{ch}(\omega t)\theta(t) \doteq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$.

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

13.2. Формула Меллина.

Теорема 13.14 (Формула Меллина). *Пусть*

- f *– оригинал;*
- $C > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\forall\, t \geqslant 0\ |f(t)| \leqslant Ce^{at}$;
- $f(t) \doteq F(p)$.

Тогда в любой точке t, где функция f непрерывно дифференцируема, справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp$$

где интеграл берется по любой прямой вида $\operatorname{Re} p = b > a$ и понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Перепишем формулу, связывающую изображение и оригинал, в виде

$$F(b+ip) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(b+ip)t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(f(t)e^{-bt}\Big)e^{-ipt}\,dt. \tag{13.6}$$

В силу условия $b > a$, функция $f(t)e^{-bt}$ экспоненциально убывает при $t \to +\infty$. Следовательно, формула (13.6) справедлива при $p \in \mathbb{R}$ и функция $F(b+ip)$ является преобразованием Фурье функции $f(t)e^{-bt}$. Используя формулу для обратного преобразования Фурье, получим

$$f(t)e^{-bt} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(b+ip)e^{ipt}\,dp = \Big[z = b+ip\Big] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z)e^{(z-b)t}\,dz = e^{-bt}\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z)e^{zt}\,dz. \;\square$$

Теорема 13.15 (Вычисление интеграла из формулы Меллина (замыкание контура в правой полуплоскости))**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid \operatorname{Re} z > b\}$, *где* $b \in \mathbb{R}$;
- $E = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset D$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $f \in \mathcal{H}(D \setminus E) \cap C(\overline{D} \setminus E)$;
- R – *произвольное положительное число такое, что* $R > \max\limits_{z\in E} |z|$;
- $\gamma_\rho = \{z \mid \operatorname{Re} z \geqslant b,\ |z| = \rho\}$, *где* $\rho \geqslant R$;
- $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \max\limits_{z\in\gamma_\rho} |f(z)| = 0$.
- γ_- – *отрицательно ориентированная граница области* $\{z \mid |z| < R,\ \operatorname{Re} z > b\}$;
- $\alpha < 0$.

Тогда

$$\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} f(z)e^{\alpha z}\,dz = \int\limits_{\gamma_-} R(z)e^{\alpha z}\,dz.$$

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 6.30. $\square$

Теорема 13.16 (Вычисление интеграла из формулы Меллина (замыкание контура в левой полуплоскости))**.** *Пусть*

- $D = \{z \mid \operatorname{Re} z < b\}$, *где* $b \in \mathbb{R}$;
- $E = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset D$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- $f \in \mathcal{H}(D \setminus E) \cap C(\overline{D} \setminus E)$;
- R – *произвольное положительное число такое, что* $R > \max\limits_{z\in E} |z|$;
- $\gamma_\rho = \{z \mid \operatorname{Re} z \leqslant b,\ |z| = \rho\}$, *где* $\rho \geqslant R$;
- $\lim\limits_{\rho\to+\infty} \max\limits_{z\in\gamma_\rho} |f(z)| = 0$.
- γ_+ – *положительно ориентированная граница области* $\{z \mid |z| < R,\ \operatorname{Re} z < b\}$;

- $\alpha > 0$.

Тогда

$$\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} f(z)e^{\alpha z}\,dz = \int\limits_{\gamma_+} R(z)e^{\alpha z}\,dz.$$

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 6.30. □

13.3. **Операционный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Теорема 13.17 (Операционный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений)**.** *Пусть*

- f *– оригинал;*
- x *– решение задачи Коши*

$$\begin{cases} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t), \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1},\ x^{(n-2)}(0) = x_{n-2},\ \ldots,\ x'(0) = x_1,\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$ *и* $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ *– произвольные комплексные постоянные и, кроме того,* $a_n \neq 0$*;*

- $f(t) \doteq F(p)$.

Тогда

(1) $x(t)\theta(t),\ x'(t)\theta(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t)\theta(t)$ *– оригиналы;*

(2) $A(p)X(p) = F(p) + B(p)$, *где* $X(p)$ *– изображение* $x(t)\theta(t)$ *и*

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots a_1 p + a_0,$$

$$B(p) = a_n\left(p^{n-1}x_0 + \ldots + x_{n-1}\right) + a_{n-1}\left(p^{n-2}x_0 + \ldots + x_{n-2}\right) + \ldots + a_1 x_0.$$

Доказательство. (1) Без доказательства (может быть выведено из стандартных свойств дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами).

(2) Применяя преобразование Лапласа к уравнению

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t),$$

и, используя теоремы 13.3 и 13.5, получим, что

$$a_n\left(p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)\right) + a_{n-1}\left(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x(0) - \ldots - x^{(n-2)}(0)\right) + \ldots +$$

$$+a_1\left(pX(p) - x(0)\right) + a_0 X(p) = F(p),$$

$$X(p)\left(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots a_1 p + a_0\right) =$$

$$= F(p) + a_n\left(p^{n-1}x(0) + \ldots + x^{(n-1)}(0)\right) + a_{n-1}\left(p^{n-2}x(0) + \ldots + x^{(n-2)}(0)\right) + \ldots + a_1 x(0),$$

$$A(p)X(p) = F(p) + a_n\left(p^{n-1}x_0 + \ldots + x_{n-1}\right) + a_{n-1}\left(p^{n-2}x_0 + \ldots + x_{n-2}\right) + \ldots + a_1 x_0.\ \square$$

Пример 13.18. *Найти решение задачи Коши при* $t \geqslant 0$ *операционным методом*

$$x' + x = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\theta(t) - \theta(t-\varepsilon)\Big), \quad x(0) = 0, \tag{13.7}$$

где $\varepsilon > 0$*. Найти предел решения при* $\varepsilon \to 0$.

Решение. Для вычисления преобразование Лапласа функции $\frac{1}{\varepsilon}\Big(\theta(t)-\theta(t-\varepsilon)\Big)$, воспользуемся теоремами 13.13 и 13.8

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big(\theta(t)-\theta(t-\varepsilon)\Big) \doteq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{p}-e^{-\varepsilon p}\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{\varepsilon p}\left(1-e^{-\varepsilon p}\right).$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (13.7), получим

$$pX(p)+X(p)=\frac{1}{\varepsilon p}\left(1-e^{-\varepsilon p}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad X(p)=\frac{1}{\varepsilon p(p+1)}\left(1-e^{-\varepsilon p}\right).$$

Функция $X(p)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}(p)>0$. Воспользуемся формулой Меллина, полагая $b=1>0$,

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{1}{\varepsilon p(p+1)}\left(1-e^{-\varepsilon p}\right)e^{pt}\,dp.$$

Из теоремы 13.16 следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^{pt}}{\varepsilon p(p+1)}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_+}\frac{e^{pt}}{\varepsilon p(p+1)}\,dp=\operatorname*{res}_{p=-1}\frac{e^{pt}}{\varepsilon p(p+1)}+\operatorname*{res}_{p=0}\frac{e^{pt}}{\varepsilon p(p+1)}=$$
$$=-\frac{e^{-t}}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}(1-e^{-t})$$

при $t>0$ (γ_+ – положительно ориентированная граница области $\{z\mid |z|<2,\ \mathrm{Re}(z)<1\}$) и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^{p(t-\varepsilon)}}{\varepsilon p(p+1)}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_-}\frac{e^{p(t-\varepsilon)}}{\varepsilon p(p+1)}\,dp=\operatorname*{res}_{p=-1}\frac{e^{p(t-\varepsilon)}}{\varepsilon p(p+1)}+\operatorname*{res}_{p=0}\frac{e^{p(t-\varepsilon)}}{\varepsilon p(p+1)}=$$
$$=-\frac{e^{-(t-\varepsilon)}}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}(1-e^{-(t-\varepsilon)})$$

при $t>\varepsilon$.

Из теоремы 13.15 следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^{p(t-\varepsilon)}}{\varepsilon p(p+1)}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_-}\frac{e^{p(t-\varepsilon)}}{\varepsilon p(p+1)}\,dp=0$$

при $t\in[0,\varepsilon)$ (γ_- – отрицательно ориентированная граница области $\{z\mid |z|<2,\ \mathrm{Re}(z)>1\}$).

Собирая полученные формулы вместе, получим, что

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}(1-e^{-t}), & t\in[0,\varepsilon],\\ \frac{1}{\varepsilon}(1-e^{-t})-\frac{1}{\varepsilon}(1-e^{-(t-\varepsilon)}), & t\geqslant\varepsilon\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}(1-e^{-t}), & t\in[0,\varepsilon],\\ \frac{e^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}\,e^{-t}, & t\geqslant\varepsilon.\end{cases}$$

При $\varepsilon\to 0$ получим, что $x(t)=e^{-t}$ при $t\geqslant 0$. $\square$

14. Асимптотические методы

14.1. Асимптотические последовательности.

Определение 14.1 (Асимптотическая последовательность). *Пусть*

- *последовательность функций* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *определена в некоторой окрестности точки* x_0.

Говорят, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– асимптотическая последовательность при* $x \to x_0$, *если*

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$$

при $x \to x_0$.

Определение 14.2 (Асимптотическое разложение). *Пусть*

- *функция* f *и функциональная последовательность* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *определены в некоторой окрестности точки* x_0;
- $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– асимптотическая последовательность при* $x \to x_0$;
- $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– числовая последовательность.*

Формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ *называют асимптотическим разложением функции* f *при* $x \to x_0$, *если*

$$\forall\ N \in \mathbb{N} \quad f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n(x) = o(\varphi_N(x))$$

при $x \to x_0$. *В этом случае пишут*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \quad x \to x_0.$$

Пример 14.3. *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– бесконечно дифференцируемая функция в окрестности точки* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Тогда (даже если ряд Тейлора расходится)*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \to x_0.$$

Пример 14.4. *При* $x \to +\infty$ *верно, что*

$$\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\,dt = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{de^{x-t}}{t} = \frac{1}{x} - \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + (-1)^{N+1}(N+1)! \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{N+2}}\,dt,$$

где $N \in \mathbb{N}$. *Более того,*

$$\left| \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\,dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \right| = (N+1)! \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{N+2}}\,dt \leqslant \frac{(N+1)!}{x^{N+2}} \int\limits_x^{+\infty} e^{x-t}\,dt = \frac{(N+1)!}{x^{N+2}} = o\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)$$

при $x \to +\infty$. *Таким образом,*

$$\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\,dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad x \to +\infty. \tag{14.1}$$

Отметим, что ряд, стоящий в правой части соотношения (14.1) *расходится при* $x > 0$.

14.2. **Асимптотическое поведение интегралов типа Лапласа.** Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx, \tag{14.2}$$

где $[a,b]$ – конечный интервал на вещественной оси, функции f и S принадлежат $C^\infty[a,b]$, S – вещественная функция и λ – вещественный параметр.

Мы будем интересоваться асимптотическим поведением интеграла (14.2) при $\lambda \to +\infty$. Из очевидной оценки

$$\left|\int_\Delta f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\right| \leqslant Ce^{M\lambda}, \quad C = \max_{x\in\Delta}|f(x)|, \quad M = \max_{x\in\Delta} S(x), \quad \lambda > 0,$$

следует, что основной вклад в асимптотику интеграла (14.2) дает окрестность той точки (или, быть может, нескольких точек), в которой функция S принимает свое наибольшее значение.

Теорема 14.5 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа (вклад от левой граничной точки для случая $S(x) = -x$))**.** *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int_a^b f(x)e^{-\lambda x}\,dx \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{\lambda^{n+1}}\,e^{-\lambda a}$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $N \in \mathbb{Z}_+$. Из формулы Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа) следует, что

$$\forall\ x \in [a,b]\ \exists\ \xi \in (a,b)\ :\ f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + r_N(x),$$

где

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\,(x-a)^{N+1}.$$

Легко видеть, что остаточный член r_N допускает оценку

$$\forall\ x \in [a,b] \quad |r_N(x)| \leqslant M(x-a)^{N+1}, \quad M = \max_{\xi\in[a,b]} \frac{|f^{(N+1)}(\xi)|}{(n+1)!}.$$

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)e^{-\lambda x}\,dx = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \int_a^b (x-a)^n e^{-\lambda x}\,dx + \int_a^b r_N(x)e^{-\lambda x}\,dx. \tag{14.3}$$

Оценим каждый член в правой части формулы (14.3). Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ при $\lambda \to +\infty$ верно, что

$$\int\limits_a^b (x-a)^n e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a}\int\limits_a^{+\infty} (x-a)^n e^{-\lambda(x-a)}\,dx + O\left(e^{-\lambda b}\right) = \Big[y = \lambda(x-a)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{n+1}} e^{-\lambda a}\int\limits_0^{+\infty} y^n e^{-y}\,dy + O\left(e^{-\lambda b}\right) = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}}\,e^{-\lambda a} + O\left(e^{-\lambda b}\right) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}\,e^{-\lambda a} + O\left(e^{-\lambda b}\right).$$

Аналогичная оценка при $\lambda \to +\infty$ справедлива для остаточного члена

$$\left|\int\limits_a^b r_N(x) e^{-\lambda x}\,dx\right| \leqslant M\int\limits_a^b (x-a)^{N+1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{M(N+1)!}{\lambda^{N+2}}\,e^{-\lambda a} + O\left(e^{-\lambda b}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\,e^{-\lambda a}\right).$$

Подставляя полученные оценки в формулу (14.3), получим, что для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ верно, что

$$\int\limits_a^b f(x) e^{-\lambda x}\,dx = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{\lambda^{n+1}}\,e^{-\lambda a} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\,e^{-\lambda a}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. $\square$

Теорема 14.6 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа (вклад от левой граничной точки для случая $S'(a) \neq 0$)). *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, $S \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- $\forall\ x \in (a,b] \quad S(x) < S(a)$;
- $S'(a) \neq 0$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x) e^{\lambda S(x)}\,dx = -\frac{1}{\lambda S'(a)}\,e^{\lambda S(a)}\left(f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Из условия теоремы получим, что

$$\exists\ \delta \in (a,b]\ :\ \forall\ x \in (a,\delta] \quad S'(x) < 0.$$

Следовательно, на отрезке $[a,\delta]$ функция S обратима. Обозначим обратную функцию к $(-S)$ через φ и заметим, что функция φ – возрастает на $[a,\delta]$. Легко видеть, что

$$\varphi'(y)\Big|_{y=-S(a)} = \frac{1}{-S'(a)}.$$

Выполняя замену переменных в интеграле по отрезку $[a,\delta]$, получим

$$\int\limits_a^\delta f(x) e^{\lambda S(x)}\,dx = \Big[y = -S(x),\ x = \varphi(y)\Big] = \int\limits_{-S(a)}^{-S(\delta)} f(\varphi(y))\varphi'(y) e^{-\lambda y}\,dy =$$

(воспользуемся теоремой 14.5)

$$= \frac{f(\varphi(y))\varphi'(y)}{\lambda}\, e^{-\lambda y}\Big|_{y=-S(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\, e^{\lambda S(a)}\right) = -\frac{f(a)}{\lambda S'(a)}\, e^{\lambda S(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\, e^{\lambda S(a)}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. $\square$

Второе доказательство теоремы 14.6**.** Из условия теоремы следует, что

$$\exists\ \delta \in (a, b] \ :\ \forall\ x \in (a, \delta] \quad S'(x) < 0.$$

Отсюда, используя интегрирование по частям, получим, что

$$\int\limits_a^\delta f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx = \int\limits_a^\delta \frac{f(x)}{\lambda S'(x)}\, de^{\lambda S(x)} = \frac{f(x)}{\lambda S'(x)} e^{\lambda S(x)}\Big|_a^\delta - \int\limits_a^\delta \left(\frac{f(x)}{\lambda S'(x)}\right)' e^{\lambda S(x)}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\frac{f(a)}{S'(a)}\, e^{\lambda S(a)} - \frac{1}{\lambda}\int\limits_a^\delta \left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)' e^{\lambda S(x)}\, dx + O\left(e^{\lambda S(\delta)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\frac{f(a)}{S'(a)}\, e^{\lambda S(a)} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{S'(a)}\left(\frac{f(a)}{S'(a)}\right)' e^{\lambda S(a)} + \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_a^\delta \left(\frac{1}{S'(x)}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)'\right)' e^{\lambda S(x)}\, dx + O\left(e^{\lambda S(\delta)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\frac{f(a)}{S'(a)}\, e^{\lambda S(a)} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{S'(a)}\left(\frac{f(a)}{S'(a)}\right)' e^{\lambda S(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\, e^{\lambda S(a)}\right) + O\left(e^{\lambda S(\delta)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\frac{f(a)}{S'(a)}\, e^{\lambda S(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\, e^{\lambda S(a)}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Обозначим максимум функции S на отрезке $[\delta, b]$ через M. Учитывая, что функция S имеет максимум в точке a, получим, что $M < S(a)$ и, вместе с этим,

$$\int\limits_\delta^b f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx = O\left(e^{\lambda M}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\, e^{\lambda S(a)}\right).$$

при $\lambda \to +\infty$.

Собирая полученные оценки вместе, получим, что

$$\int\limits_a^b f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx = \int\limits_a^\delta f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx + \int\limits_\delta^b f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx = -\frac{1}{\lambda}\frac{f(a)}{S'(a)}\, e^{\lambda S(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\, e^{\lambda S(a)}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. $\square$

Теорема 14.7 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа (вклад от правой граничной точки для случая $S'(b) \neq 0$))**.** *Пусть*

- $f \in C^\infty[a, b]$, $S \in C^\infty[a, b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- $\forall\ x \in [a, b) \quad S(x) < S(b)$;
- $S'(b) \neq 0$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = \frac{1}{\lambda S'(b)}\,e^{\lambda S(b)}\left(f(b)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 14.8 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа (вклад от внутреннего максимума, случай $S(x) = -x^2$)). *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < 0 < b < \infty$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{-\lambda x^2}\,dx \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Также как и при доказательстве теоремы 14.5 получим, что для произвольного $N \in \mathbb{Z}_+$ имеет место разложение

$$\forall\ x \in [a,b]\ \exists\ \xi \in (a,b)\ :\ f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + r_N(x),$$

где

$$r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\,x^{N+1}$$

и остаточный член r_N допускает оценку

$$\forall\ x \in [a,b] \quad |r_N(x)| \leqslant M|x|^{N+1}, \quad M = \max_{\xi\in[a,b]} \frac{|f^{(N+1)}(\xi)|}{(n+1)!}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)e^{-\lambda x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int\limits_a^b x^n e^{-\lambda x^2}\,dx + \int\limits_a^b r_N(x)e^{-\lambda x^2}\,dx. \tag{14.4}$$

Оценим каждый член в правой части формулы (14.4). Положим $\delta = \frac{1}{2}\min(a^2, b^2)$. Для любого четного неотрицательного n при $\lambda \to +\infty$ верно, что

$$\int\limits_a^b x^n e^{-\lambda x^2}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n e^{-\lambda x^2}\,dx + O(e^{-\lambda\delta}) = \Big[y = \sqrt{\lambda}\,x\Big] = \frac{1}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}} y^n e^{-y^2}\,dy + O(e^{-\lambda\delta}) =$$

$$= \frac{2}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_0^{+\infty} y^n e^{-y^2}\,dy + O(e^{-\lambda\delta}) = \Big[z = y^2\Big] = \frac{1}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_0^{+\infty} z^{\frac{n-1}{2}} e^{-z}\,dz + O(e^{-\lambda\delta}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}} + O(e^{-\lambda\delta}).$$

Для любого нечетного положительного n при $\lambda \to +\infty$ верно, что

$$\int\limits_a^b x^n e^{-\lambda x^2}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n e^{-\lambda x^2}\,dx + O(e^{-\lambda\delta}) = 0 + O(e^{-\lambda\delta}) = O(e^{-\lambda\delta}). \tag{14.5}$$

Аналогичная оценка при $\lambda \to +\infty$ справедлива для остаточного члена

$$\left| \int\limits_a^b r_N(x) e^{-\lambda x^2}\, dx \right| \leqslant M \int\limits_a^b |x|^{N+1} e^{-\lambda x^2}\, dx = 2M \int\limits_0^{+\infty} x^{N+1} e^{-\lambda x^2}\, dx + O(e^{-\lambda\delta}) = O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{N+2}{2}}} \right).$$

Подставляя полученные оценки в формулу (14.4), получим, что для любого $N = 2K+1$, где $K \in \mathbb{Z}_+$ верно, что

$$\int\limits_a^b f(x) e^{-\lambda x^2}\, dx = \sum_{k=0}^{K} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{\lambda^{\frac{2k+1}{2}}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{2K+3}{2}}} \right)$$

при $\lambda \to +\infty$. $\square$

Теорема 14.9 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа (вклад от максимума на границе для случая $S(x) = -x^2$)). *Пусть*

- $f \in C^\infty[0, b]$, *где* $0 < b < \infty$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_0^b f(x) e^{-\lambda x^2}\, dx \sim \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}}$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Доказательство настоящей теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 14.8 за исключением оценки (14.5), которая примет вид

$$\int\limits_0^b x^n e^{-\lambda x^2}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x^2}\, dx + O(e^{-\lambda\delta}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}} + O(e^{-\lambda\delta})$$

при $\lambda \to +\infty$.

Самостоятельно. $\square$

Теорема 14.10 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа (вклад от внутреннего максимума)). *Пусть*

- $f \in C^\infty[a, b]$, $S \in C^\infty[a, b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- $\exists\ c \in (a, b)\ :\ \forall\ x \in [a, c) \cup (c, b] \quad S(x) < S(c)$;
- $S''(c) \neq 0$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx = e^{\lambda S(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c)|}} \left(f(c) + O\left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Разложение функции S в асимптотический ряд Тейлора в окрестности точки c имеет вид

$$S(x) = S(c) + \frac{S''(c)}{2}(x - c)^2 + O((x - c)^3).$$

Отсюда следует, что функция

$$g(x) = (x-c)\sqrt{\frac{S(c)-S(x)}{(x-c)^2}}$$

является гладкой в некоторой окрестности точки c. Вычислим производную функции g в точке c

$$g'(c) = \lim_{x\to c}\sqrt{\frac{S(c)-S(x)}{(x-c)^2}} = \lim_{x\to c}\sqrt{-\frac{S''(c)}{2}+O(x-c)} = \sqrt{\frac{|S''(c)|}{2}} \neq 0.$$

Таким образом, из теоремы об обратной функции следует, что найдется окрестность $(c-\delta, c+\delta)$ точки c в которой функция g обратима. Введем обозначение $\varphi = g^{-1}$ и заметим, что

$$g^2(x) = S(c) - S(x), \quad \varphi'(0) = \frac{1}{g'(c)} = \sqrt{\frac{2}{|S''(c)|}}.$$

Выполним замену переменной в интеграле

$$\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = \Big[y = g(x), x = \varphi(y)\Big] = e^{\lambda S(c)}\int\limits_{g(c-\delta)}^{g(c+\delta)} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y^2}\,dy.$$

Теперь из теоремы 14.8 следует, что

$$\int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = e^{\lambda S(c)}\left(f(\varphi(y))\varphi'(y)\Big|_{y=0}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right) =$$

$$= e^{\lambda S(c)}\left(f(c)\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right) = e^{\lambda S(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}\left(f(c) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) =$$

при $\lambda \to +\infty$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = \int\limits_a^{c-\delta} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx + \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx + \int\limits_{c+\delta}^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx$$

и

$$\int\limits_a^{c-\delta} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = O\left(\frac{e^{\lambda S(c)}}{\lambda^{3/2}}\right), \quad \int\limits_{c+\delta}^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = O\left(\frac{e^{\lambda S(c)}}{\lambda^{3/2}}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. □

Теорема 14.11 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа (вклад от максимума на границе для случая $S'(c) = 0$)). *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, $S \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- $c = a$ *или* $c = b$;
- $\forall\ x \in [a,b]\setminus\{c\} \quad S(x) < S(c)$;
- $S'(c) = 0$, $S''(c) \neq 0$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{\lambda S(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}\left(f(c)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 14.12 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа (общий случай))**.** *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, $S \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- *функция* S *принимает свое наибольшее значение на отрезке* $[a,b]$ *в точках* $c_1, \ldots, c_n$, *где* $n \in \mathbb{N}$;
- λ – *вещественный параметр.*

Пусть для любого $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ *выполнено одно из следующих условий.*

- *Если* $c_k = a$ *и* $S'(a) < 0$, *положим*

$$F_{c_k}(\lambda) = -e^{\lambda S(a)}\frac{1}{\lambda S'(a)}\left(f(a)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \text{ при } \lambda \to +\infty. \tag{14.6}$$

- *Если* $c_k = b$ *и* $S'(b) > 0$, *положим*

$$F_{c_k}(\lambda) = e^{\lambda S(b)}\frac{1}{\lambda S'(b)}\left(f(b)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

- *Если* $S'(c_k) = 0$, $S''(c_k) \neq 0$, $c_k \neq a$ *и* $c_k \neq b$, *положим*

$$F_{c_k}(\lambda) = e^{\lambda S(c_k)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c_k)|}}\left(f(c_k)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \text{ при } \lambda \to +\infty. \tag{14.7}$$

- *Если* $S'(c_k) = 0$, $S''(c_k) \neq 0$ *и* $c_k = a$ *или* $c_k = b$, *положим*

$$F_{c_k}(\lambda) = \frac{1}{2}\,e^{\lambda S(c_k)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c_k)|}}\left(f(c_k)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \text{ при } \lambda \to +\infty. \tag{14.8}$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = \sum_{k=1}^n F_{c_k}(\lambda)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ такое, что отрезки

$$K_p = [c_p-\delta, c_p+\delta] \cap [a,b],$$

попарно не пересекаются при $p \in \{1,2,\ldots,n\}$. Полагая

$$V = [a,b] \setminus \bigcup_{p=1}^n K_p\,,$$

получим, что

$$\int\limits_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx = \int\limits_V f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx + \sum_{p=1}^n \int\limits_{K_p} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что асимптотическое поведение каждого из интегралов

$$\int\limits_{K_p} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx$$

при $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ описывается одной из теорем 14.6, 14.7, 14.10 или 14.11, а интеграл

$$\int\limits_{V} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx$$

оказывается экспоненциально малой поправкой по отношению к остальным интегралам (так как максимум функции S на множестве V_p меньше максимума функции S на отрезке $[a, b]$). $\square$

Пример 14.13. *Найти асимптотическое поведение интеграла*

$$\int\limits_{-2}^{2} (x^2+5)e^{\lambda(3x-x^3)}\,dx$$

при $\lambda \to +\infty$. Выписать первые два члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

Решение. Функция $S(x) = 3x - x^3$ достигает своего максимума на отрезке $[-2, 2]$ в двух точках $c_1 = -2$ и $c_2 = 1$. Вклад от точки $c_1 = -2$ описывается формулой (14.6)

$$S(-2) = 2, \quad S'(-2) = (3-3x^2)|_{x=-2} = -9, \quad f(-2) = 9,$$

$$F_{c_1=-2}(\lambda) = e^{2\lambda}\frac{1}{9\lambda}\left(9 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = e^{2\lambda}\frac{1}{\lambda}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Вклад от точки $c_2 = 1$ описывается формулой (14.7)

$$S(1) = 2, \quad S'(1) = (3-3x^2)|_{x=-2} = 0, \quad S''(1) = -6x|_{x=1} = -6, \quad f(1) = 6,$$

$$F_{c_2=1}(\lambda) = e^{2\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{6\lambda}}\left(6 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = e^{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{12\lambda}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Собирая полученные асимптотики вместе, из теоремы 14.12 следует, что

$$\int\limits_{-2}^{2} (x^2+5)e^{\lambda(3x-x^3)}\,dx = e^{2\lambda}\left(\sqrt{\frac{\pi}{12\lambda}} + \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. $\square$

Пример 14.14. *Найти асимптотическое поведение интеграла*

$$\int\limits_{0}^{1} (1+2x)e^{\lambda(2x-x^2)}\,dx$$

при $\lambda \to +\infty$. Выписать старший член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

Решение. Функция $S(x) = 2x - x^2$ достигает своего максимума на отрезке $[0, 1]$ в одной точке $c_1 = 1$. Вклад от точки $c_1 = 1$ описывается формулой (14.8)

$$S(1) = 1, \quad S'(1) = (2 - 2x)|_{x=1} = 0, \quad S''(1) = -2, \quad f(1) = 3,$$

$$F_{c_1=1}(\lambda) = e^{\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{2\lambda}}\left(3 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = e^{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(3 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. Отсюда и из теоремы 14.12 следует, что

$$\int\limits_0^1 (1 + 2x)e^{\lambda(2x-x^2)}\,dx = e^{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(3 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. $\square$

14.3. **Формула Стирлинга.**

Теорема 14.15 (Формула Стирлинга). *При $n \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\Gamma(n + 1) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Преобразуем выражение для Г-функции следующим образом

$$\Gamma(n + 1) = \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{n\ln t - t}\,dt = \Big[t = nx\Big] = n^{n+1}\int\limits_0^{+\infty} e^{n(\ln x - x)}\,dx. \tag{14.9}$$

Функция $S(x) = \ln x - x$ достигает своего максимума на полуоси $[0, +\infty)$ в точке $c_1 = 1$. Вклад в асимптотику от точки $c_1 = 1$ описывается формулой (14.7)

$$S(1) = -1, \quad S'(1) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\Big|_{x=1} = 0, \quad S''(1) = -\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1} = -1,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{n(\ln x - x)}\,dx = e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

при $n \to +\infty$. Подставляя полученную асимптотику в формулу (14.9), найдем, что

$$\Gamma(n + 1) = n^{n+1}\int\limits_0^{+\infty} e^{n(\ln x - x)}\,dx = n^{n+1}e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

при $n \to +\infty$. $\square$

14.4. **Асимптотическое поведение интегралов типа Фурье.** Рассмотрим интеграл вида

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx, \tag{14.10}$$

где $[a, b]$ – конечный отрезок на вещественной оси, функции f и S принадлежат $C^\infty[a, b]$, S – вещественная функция и λ – вещественный параметр.

Мы будем интересоваться асимптотическим поведением интеграла (14.10) при $\lambda \to +\infty$. Как будет показано ниже, основной вклад в асимптотику интеграла (14.10) дают окрестности тех

точек, в которых функция S' обращается в ноль (такие точки мы будем называть стационарными), кроме того, вклад в асимптотику дают оба конца интегрирования.

Теорема 14.16 (Асимптотическое поведение интеграла типа Фурье (вклад от граничных точек)). *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, $S \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- $\forall\ x \in [a,b]\ S'(x) \neq 0$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \frac{f(b)}{i\lambda S'(b)}\,e^{i\lambda S(b)} - \frac{f(a)}{i\lambda S'(a)}\,e^{i\lambda S(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получим, что

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \int\limits_a^b \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)}\,de^{i\lambda S(x)} = \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)}e^{i\lambda S(x)}\Big|_a^b - \int\limits_a^b \left(\frac{f(x)}{i\lambda S'(x)}\right)' e^{i\lambda S(x)}\,dx =$$

$$= \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)}e^{i\lambda S(x)}\Big|_a^b - \frac{1}{(i\lambda)^2}\int\limits_a^b \frac{1}{S'(x)}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)' de^{i\lambda S(x)} =$$

$$= \frac{f(x)}{i\lambda S'(x)}e^{i\lambda S(x)}\Big|_a^b - \frac{1}{(i\lambda)^2}\frac{1}{S'(x)}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)'\Big|_a^b + \frac{1}{(i\lambda)^2}\int\limits_a^b \left(\frac{1}{S'(x)}\left(\frac{f(x)}{S'(x)}\right)'\right)' e^{i\lambda S(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{i\lambda}\frac{f(b)}{S'(b)}\,e^{i\lambda S(b)} - \frac{1}{i\lambda}\frac{f(a)}{S'(a)}\,e^{i\lambda S(a)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. □

Теорема 14.17. *Пусть* $\lambda > 0$, *тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2}\,dx = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,.$$

Доказательство. Из теоремы 3.3 (интегральная теорема Коши) можно получить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2}\,dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{i\lambda x^2}\,dx \underbrace{=}_{\text{теорема 3.3}} 2\int\limits_0^{+e^{i\frac{\pi}{4}}\infty} e^{i\lambda z^2}\,dz = \left[z = e^{i\frac{\pi}{4}}t\right] = 2e^{i\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t^2}\,dt =$$

$$= \left[y = \lambda t^2\right] = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\lambda y}\,dy = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,.\ \square$$

Теорема 14.18 (Асимптотическое поведение интеграла типа Фурье (вклад от внутренней стационарной точки для случая $S(x) = x^2$)). *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < 0 < b < \infty$;

- $f(x)$ *обращается в ноль вместе со всеми своими производными в точках* a *и* b*;*
- λ *– вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x^2}\,dx = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(f(0)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$*.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $a < -2\varepsilon < 2\varepsilon < b$ и $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что

$$|x| > 2\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \chi(x) = 0,$$
$$|x| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \chi(x) = 1.$$

Перепишем исходный интеграл в виде

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda x^2}\,dx = \int\limits_a^b (f(x)-f(0)\chi(x))e^{i\lambda x^2}\,dx + f(0)\int\limits_{\mathbb{R}} (\chi(x)-1)e^{i\lambda x^2}\,dx + f(0)\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2}\,dx. \quad (14.11)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части формулы (14.11). Из теоремы 14.17 следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2}\,dx = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} (\chi(x)-1)e^{i\lambda x^2}\,dx &= \frac{1}{2i\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\chi(x)-1}{x}\,de^{i\lambda x^2} = -\frac{1}{2i\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{\chi(x)-1}{x}\right)' e^{i\lambda x^2}\,dx = \\ &= \left[g(x) = -\frac{1}{2i}\left(\frac{\chi(x)-1}{x}\right)'\right] = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\lambda x^2}\,dx = \frac{1}{2i\lambda^2}\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,de^{i\lambda x^2} = \\ &= -\frac{1}{2i\lambda^2}\int\limits_{\mathbb{R}} g'(x)e^{i\lambda x^2}\,dx = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \to +\infty.\end{aligned}$$

Отметим, что последнее равенство справедливо в силу оценки $g'(x) = O(x^{-2})$ при $|x| \to \infty$.

Наконец, легко видеть, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_a^b \Big(f(x)-f(0)\chi(x)\Big)e^{i\lambda x^2}\,dx = \frac{1}{2i\lambda}\int\limits_a^b \frac{f(x)-f(0)\chi(x)}{x}\,de^{i\lambda x^2} = \\ &= -\frac{1}{2i\lambda}\int\limits_a^b \left(\frac{f(x)-f(0)\chi(x)}{x}\right)' e^{i\lambda x^2}\,dx = \left[h(x) = -\frac{1}{2i}\left(\frac{f(x)-f(0)\chi(x)}{x}\right)'\right] = \quad (14.12) \\ &= \frac{1}{\lambda}\int\limits_a^b h(x)e^{i\lambda x^2}\,dx = \frac{1}{\lambda}\int\limits_a^b \Big(h(x)-h(0)\chi(x)\Big)e^{i\lambda x^2}\,dx + \frac{h(0)}{\lambda}\int\limits_a^b \chi(x)e^{i\lambda x^2}\,dx = \\ &= O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right), \quad \lambda \to +\infty.\end{aligned}$$

При интегрировании по частям внеинтегральные члены не появляются, потому что соответствующие функции обращаются в ноль на концах промежутка интегрирования.

Подставляя полученные оценки в формулу (14.11), получим требуемое утверждение. □

Теорема 14.19 (Асимптотическое поведение интеграла типа Фурье (вклад от внутренней стационарной точки)). *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, $S \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- $\exists\,!\; c \in [a,b] \;:\; S'(c) = 0$ *(c – стационарная точка);*
- $c \in (a,b)$;
- $S''(c) \neq 0$;
- $f(x)$ *обращается в ноль вместе со всеми своими производными в точках* a *и* b;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = e^{i\lambda S(c)+i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} S''(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}\left(f(c)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Для определенности будем считать, что $S''(c) > 0$. Случай $S''(c) < 0$ рассматривается аналогично.

Разложение функции S в асимптотический ряд Тейлора в окрестности точки c имеет вид

$$S(x) = S(c) + \frac{S''(c)}{2}(x-c)^2 + O((x-c)^3).$$

Отсюда следует, что функция

$$g(x) = (x-c)\sqrt{\frac{S(x)-S(c)}{(x-c)^2}}$$

является гладкой в некоторой окрестности точки c. Вычислим производную функции g в точке c

$$g'(c) = \lim_{x\to c}\sqrt{\frac{S(x)-S(c)}{(x-c)^2}} = \lim_{x\to c}\sqrt{\frac{S''(c)}{2}+O(x-c)} = \sqrt{\frac{S''(c)}{2}} \neq 0.$$

Из условий $S'(c) = 0$ и $S''(c) > 0$ следует, что S – убывающая функция на $[a,c]$, откуда можно вывести, что g – возрастающая функция на $[a,c]$. Аналогично, получим, что S – возрастающая функция на $[c,b]$, откуда следует вывести, что g – возрастающая функция на $[c,b]$. Таким образом, g – возрастающая функция на $[a,b]$. Последнее означает, что функция g обратима на $[a,b]$. Введем обозначение $\varphi = g^{-1}$ и заметим, что

$$g^2(x) = S(x) - S(c), \quad \varphi'(0) = \frac{1}{g'(c)} = \sqrt{\frac{2}{S''(c)}}.$$

Выполняя замену переменной, и, используя результат теоремы 14.18, получим, что

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \Big[y = g(x), x = \varphi(y)\Big] = e^{i\lambda S(c)}\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{i\lambda y^2}\,dy =$$

$$= e^{i\lambda S(c)}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(f(\varphi(y))\varphi'(y)\Big|_{y=0} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = e^{i\lambda S(c)+i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(f(c)\sqrt{\frac{2}{S''(c)}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. $\square$

Теорема 14.20 (Асимптотическое поведение интеграла типа Фурье (вклад от стационарной точки на границе))**.** *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, $S \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- $c = a$ *или* $c = b$;
- $S'(c) = 0$, $S''(c) \neq 0$;
- c – *единственная стационарная точка функции* S *на отрезке* $[a,b]$ *(другими словами,* $\forall\, x \in [a,b] \setminus \{c\}$ $S'(c) \neq 0$*)*;
- $f(x)$ *обращается в ноль вместе со всеми своими производными в точке* a *при* $c = b$ *и в точке* b *при* $c = a$;
- λ – *вещественный параметр.*

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{i\lambda S(c)+i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} S''(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(c)|}}\left(f(c) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Доказательство данной теоремы практически полностью повторяет доказательство теоремы 14.19 и вспомогательной теоремы 14.18. Основное отличие заключается в том, что при доказательстве нового варианта теоремы 14.18 в формуле (14.12) при интегрировании по частям возникнет нетривиальный внеинтегральный член, который и «испортит» окончательную асимптотику.

Самостоятельно. $\square$

Теорема 14.21 (Разбиение единицы)**.** *Пусть*

- $-\infty < a < b < \infty$;
- K_1, K_2, …, K_n – *замкнутые непересекающиеся подмножества отрезка* $[a,b]$, *где* $n \in \mathbb{N}$.

Тогда найдутся функции φ_1, φ_2, …, φ_n, *заданные на отрезке* $[a,b]$, *и удовлетворяющие следующим условиям.*

(1) $\forall\, p \in \{1,2,\ldots,n\} \quad \varphi_p \in C^\infty[a,b]$;

(2) $\forall\, p \in \{1,2,\ldots,n\}\ \forall\, x \in K_p \quad \varphi_p(x) = 1$;

(3) $\forall\, p \in \{1,2,\ldots,n\}\ \forall\, x \in \bigcup\limits_{m=1}^{n} K_m \setminus K_p \quad \varphi_p(x) = 0$;

(4) $\forall\, p \in \{1,2,\ldots,n\}\ \forall\, x \in [a,b] \quad 0 \leqslant \varphi_p(x) \leqslant 1$;

(5) $\forall\, x \in [a,b] \quad \sum\limits_{m=1}^{n} \varphi_m(x) = 1$.

- *Набор функций $\{\varphi_p\}_{p=1}^n$ называют разбиением единицы, подчиненным набору $\{K_p\}_{p=1}^n$ замкнутых подмножеств отрезка $[a,b]$.*

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 14.22 (Асимптотическое поведение интеграла типа Фурье (общий случай))**.** *Пусть*

- $f \in C^\infty[a,b]$, $S \in C^\infty[a,b]$, *где* $-\infty < a < b < \infty$;
- S – *вещественно-значная функция;*
- *либо функция* S' *обращается в ноль на интервале* (a,b) *в конечном числе точек* $c_1, \ldots, c_n$, *где* $n \in \mathbb{N}$, *либо не обращается обращается в ноль вовсе, тогда положим* $n = 0$ *(другими словами, функция* S *имеет не более чем конечное число стационарных точек на интервале* (a,b)*);*
- $c_{n+1} = a$, $c_{n+2} = b$;
- λ – *вещественный параметр.*

Пусть для любого $k \in \{1,2,\ldots,n+2\}$ *выполнено одно из следующих условий.*

- *Если* $c_k = a$ *и* $S'(a) \neq 0$, *положим*

$$F_{c_k}(\lambda) = -e^{i\lambda S(a)} \frac{1}{i\lambda S'(a)} \left(f(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad \textit{при } \lambda \to +\infty. \tag{14.13}$$

- *Если* $c_k = b$ *и* $S'(b) \neq 0$, *положим*

$$F_{c_k}(\lambda) = e^{i\lambda S(b)} \frac{1}{i\lambda S'(b)} \left(f(b) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad \textit{при } \lambda \to +\infty. \tag{14.14}$$

- *Если* $S'(c_k) = 0$, $S''(c_k) \neq 0$, $c_k \neq a$ *и* $c_k \neq b$, *положим*

$$F_{c_k}(\lambda) = e^{i\lambda S(c) + i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} S''(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c)|}} \left(f(c_k) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad \textit{при } \lambda \to +\infty. \tag{14.15}$$

- *Если* $S'(c_k) = 0$, $S''(c_k) \neq 0$ *и* $c_k = a$ *или* $c_k = b$, *положим*

$$F_{c_k}(\lambda) = \frac{1}{2}\, e^{i\lambda S(c) + i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} S''(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c)|}} \left(f(c_k) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) \quad \textit{при } \lambda \to +\infty. \tag{14.16}$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)}\, dx = \sum_{k=1}^{n+2} F_{c_k}(\lambda)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ такое, что отрезки

$$K_p = [c_p - \delta, c_p + \delta] \cap [a,b],$$

попарно не пересекаются при $p \in \{1,2,\ldots,n+2\}$. Из теоремы 14.21 следует, что существует разбиением единицы $\{\varphi_p\}_{p=1}^{n+2}$, подчиненное набору $\{K_p\}_{p=1}^{n+2}$. Носитель каждой функции φ_p (замыкание множества точек, где функция φ_p отлична от нуля) является отрезком, который удобно обозначить через $[a_p, b_p]$. Отметим, что отрезки $[a_p, b_p]$, вообще говоря, могут пересекаются между собой при $p \in \{1,2,\ldots,n+2\}$.

Используя свойства разбиения единицы, получим, что

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \int\limits_a^b \sum_{p=1}^{n+2} \varphi_p(x)f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \sum_{p=1}^{n+2} \int\limits_a^b \varphi_p(x)f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx =$$

$$= \sum_{p=1}^{n+2} \int\limits_{a_p}^{b_p} \varphi_p(x)f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что асимптотическое поведение каждого из интегралов

$$\int\limits_{a_p}^{b_p} \varphi_p(x)f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx$$

при $p \in \{1, 2, \ldots, n+2\}$ описывается одной из теорем 14.16, 14.19 или 14.20. □

Пример 14.23. *Найти асимптотическое поведение интеграла*

$$\int\limits_0^2 xe^{i\lambda(2x-x^2)}\,dx$$

при $\lambda \to +\infty$. Выписать первые два нетривиальных члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

Решение. Функция $S(x) = 2x - x^2$ на интервале $(0, 1)$ имеет одну стационарную точку $c_1 = 1$. Вклад от точки $c_1 = 1$ описывается формулой (14.15)

$$S(1) = 1, \quad S'(1) = (2-2x)|_{x=1} = 0, \quad S''(1) = -2, \quad f(1) = 1,$$

$$F_{c_1=1}(\lambda) = e^{i\lambda - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = e^{i\lambda - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Вклад от левой граничной точки $a = 0$ описывается формулой (14.13)

$$S(0) = 0, \quad S'(1) = (2-2x)|_{x=0} = 2, \quad f(0) = 0,$$

$$F_{a=0}(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} \left(0 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Вклад от правой граничной точки $b = 2$ описывается формулой (14.14)

$$S(2) = 0, \quad S'(2) = (2-2x)|_{x=2} = -2, \quad f(2) = 2,$$

$$F_{b=2}(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} \left(2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \frac{i}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$.

Собирая полученные асимптотики вместе, из теоремы 14.22 получим, что

$$\int\limits_0^2 xe^{i\lambda(2x-x^2)}\,dx = e^{i\lambda - i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \frac{i}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right)$$

при $\lambda \to +\infty$. □

Пример 14.24. *Найти асимптотическое поведение интеграла*

$$\int\limits_1^2 xe^{i\lambda x^3}\,dx$$

при $\lambda\to+\infty$. Выписать первые два нетривиальных члена асимптотического ряда и написать порядок поправки.

Решение. Заметим, что в данном случае стационарных точек на отрезке $[1,2]$ нет и теорема 14.22 дает только старший член асимптотики. Для того чтобы получить первые два члена асимптотического ряда, поступим как при доказательстве теоремы 14.16

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 xe^{i\lambda x^3}\,dx &= \int\limits_1^2 \frac{x}{3i\lambda x^2}\,de^{i\lambda x^3} = \frac{1}{3i\lambda x}\,e^{i\lambda x^3}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{3i\lambda x}\right)' e^{i\lambda x^3}\,dx = \\ &= \frac{1}{6i\lambda}\,e^{8i\lambda} - \frac{1}{3i\lambda}\,e^{i\lambda} + \frac{1}{3i\lambda}\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}\,e^{i\lambda x^3}\,dx = \frac{1}{6i\lambda}\,e^{8i\lambda} - \frac{1}{3i\lambda}\,e^{i\lambda} + \frac{1}{3i\lambda}\int\limits_1^2 \frac{1}{2i\lambda x^4}\,de^{i\lambda x^3} = \\ &= \frac{1}{6i\lambda}\,e^{8i\lambda} - \frac{1}{3i\lambda}\,e^{i\lambda} + \frac{1}{3i\lambda}\frac{1}{2i\lambda x^4}\,e^{i\lambda x^3}\Big|_1^2 + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) = \\ &= \frac{1}{6i\lambda}\,e^{8i\lambda} - \frac{1}{3i\lambda}\,e^{i\lambda} - \frac{1}{96\lambda^2}\,e^{8i\lambda} + \frac{1}{6\lambda^2}\,e^{i\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\end{aligned}$$

при $\lambda\to+\infty$. □

14.5. **Метод перевала.** Рассмотрим интеграл вида

$$\int\limits_\gamma f(z)e^{\lambda S(z)}\,dz, \tag{14.17}$$

где γ – контур интегрирования, f, S – регулярные функции в некоторой области, содержащей контур γ и λ – вещественный параметр.

Мы будем интересоваться асимптотическим поведением интеграла (14.17) при $\lambda\to+\infty$. Регулярность функций f и S позволяет деформировать контур интегрирования γ, не изменяя при этом значение интеграла. Основная идея при вычислении асимптотики интеграла вида (14.17) заключается в том, чтобы подходящей деформацией контура интегрирования γ свести исходную задачу к вычислению асимптотического поведения интегралов типа Лапласа и Фурье. Оказывается, что всегда возможно так продеформировать контур γ, чтобы он контур состоял из конечного числа участков кривых на которых выполнено одно из двух условий

$$\operatorname{Im} S(z) = Const \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} S(z) = Const. \tag{14.18}$$

Несложно понять, что на кривых, для которых выполнено условие $\operatorname{Im}(S(z)) = Const$, интеграл (14.17) является интегралом типа Лапласа и для вычисления его асимптотического поведения можно использовать результаты теоремы 14.12. Вместе с тем, на кривых, для которых выполнено условие $\operatorname{Re}(S(z)) = Const$, интеграл (14.17) является интегралом типа Фурье и для вычисления его асимптотического поведения можно использовать результаты теоремы 14.22. Обсудим описанные идеи более подробно.

Определение 14.25 (Перевальный контур)**.** *Пусть*

- *D – односвязная область в $\mathbb{C}$;*
- *$S \in \mathcal{H}(D)$;*
- *$a \in D$, $b \in D$.*

Тогда из всех кусочно-гладких кривых, соединяющих точки a и b, перевальным контуром называют любую кривую γ, удовлетворяющую следующим условиям.

(1) *Кривая γ состоит из объединения конечного числа гладких кривых, на каждой из которых выполнено одно из двух условий* (14.18).
(2) *Для любой кусочно-гладкой кривой Γ, соединяющей точки a и b верно, что*

$$\max_{z\in\gamma} \operatorname{Re} S(z) \leqslant \max_{z\in\Gamma} \operatorname{Re} S(z).$$

Теорема 14.26 (Линии уровня Im и Re частей функции $S(z) = z$)**.** *Пусть*

- *$\forall\ z \in \mathbb{C}\ S(z) = z$.*

Тогда

(1) *$\forall\ C \in \mathbb{R}$ линия уровня $\operatorname{Re} S(z) = C$ является прямой параллельной оси Oy;*
(2) *$\forall\ C \in \mathbb{R}$ линия уровня $\operatorname{Im} S(z) = C$ является прямой параллельной оси Ox.*

Доказательство. Следует из того, что $\operatorname{Re} S(z) = x$ и $\operatorname{Im} S(z) = y$. □.

Определение 14.27 (Точка перевала)**.** *Пусть*

- *S регулярна в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Тогда

(1) *z_0 называют точкой перевала функции S, если $S'(z_0) = 0$;*
(2) *точку перевала z_0 называют простой, если $S''(z_0) \neq 0$.*

Теорема 14.28 (Линии уровня Im и Re регулярной функции S в окрестности неперевальной точки)**.** *Пусть*

- *D – область в $\mathbb{C}$;*
- *$S \in \mathcal{H}(D)$;*
- *$S'(z_0) \neq 0$, где $z_0 \in D$.*

Тогда существуют область U, содержащая точку z_0, область V, содержащая точку $z = 0$, и конформное отображение f области U на V такие, что

(1) *$\forall\ C \in \mathbb{R}$ часть линии уровня $\operatorname{Re} S(z) = C$, располагающаяся в области U, отображается отображением f в часть линии уровня $\operatorname{Re} z = C - \operatorname{Re} S(z_0)$, располагающуюся в области V;*
(2) *$\forall\ C \in \mathbb{R}$ часть линии уровня $\operatorname{Im} S(z) = C$, располагающаяся в области U, отображается отображением f в часть линии уровня $\operatorname{Im} z = C - \operatorname{Im} S(z_0)$, располагающуюся в области V.*
   - *Другими словами, структура линий уровня функции S в окрестности точки z_0 такая же, как у функции z.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\forall\ z \in D \quad f(z) = S(z) - S(z_0).$$

Легко видеть, что $f'(z_0) = S'(z_0) \neq 0$. Отсюда и из теоремы 2.20 следует, что f обратима в некоторой области U, содержащей точку z_0. Обозначим образ области U под действием функции f через V. Из сказанного следует, что f является конформным отображением U на V.

Пусть теперь C – произвольная вещественная постоянная и z такая, что $\operatorname{Re} S(z) = C$ и $z \in U$. Обозначим образ z под действием отображения f через w. Легко видеть, что

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} S(z) - \operatorname{Re} S(z_0) = C - \operatorname{Re} S(z_0),$$
$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} S(z) - \operatorname{Im} S(z_0) = C - \operatorname{Im} S(z_0). \square$$

Теорема 14.29 (Линии уровня Im и Re частей функции $S(z) = z^2$)**.** *Пусть*

- $\forall\ z \in \mathbb{C}\ S(z) = z^2$.

Тогда

(1) *линия уровня* $\operatorname{Re} S(z) = 0$ *состоит из двух прямых* $y = \pm x$;
(2) $\forall\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *линия уровня* $\operatorname{Re} S(z) = C$ *является гиперболой с асимптотами* $y = \pm x$ *(см. рисунок* 24*)*;
(3) *линия уровня* $\operatorname{Im} S(z) = 0$ *состоит из двух прямых* $y = 0$ *и* $x = 0$;
(4) $\forall\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *линия уровня* $\operatorname{Im} S(z) = C$ *является гиперболой с асимптотами* $y = 0$ *и* $x = 0$ *(см. рисунок* 24*)*.

Доказательство. Следует из того, что $\operatorname{Re} S(z) = x^2 - y^2$ и $\operatorname{Im} S(z) = 2xy$. $\square$.

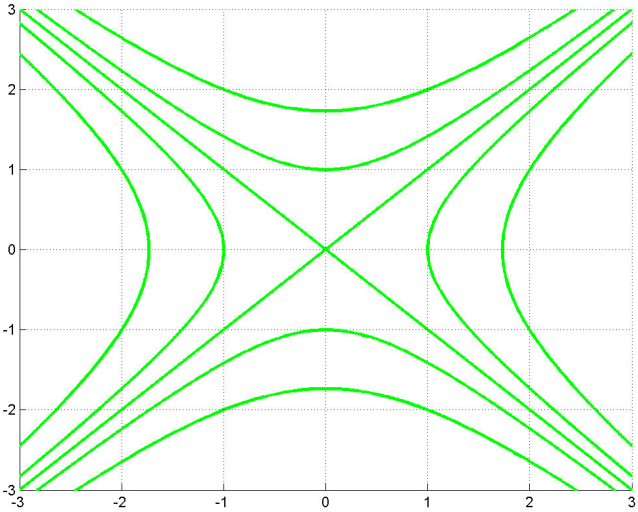

Рис. 24. Семейство кривых вида $\operatorname{Re}(z^2) = C$ при $C = 0, \pm 1, \pm 3$ выделено зеленым цветом.

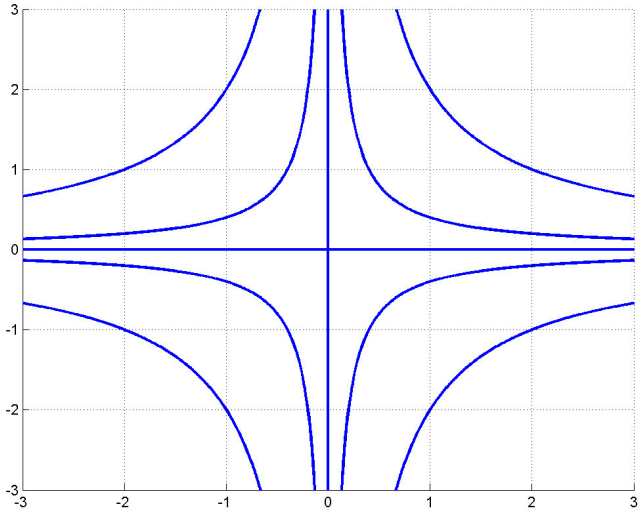

Рис. 25. Семейство кривых вида $\operatorname{Im}(z^2) = C$ при $C = 0, \pm 0.2, \pm 1$ выделено синим цветом.

Теорема 14.30 (Линии уровня Im и Re регулярной функции S в окрестности простой точки перевала)**.** *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$;
- $S \in \mathcal{H}(D)$;
- $z_0 \in D$ *– простая точка перевала функции* S.

Тогда существуют область U*, содержащая точку* z_0*, область* V*, содержащая точку* $z = 0$*, и конформное отображение* f *области* U *на* V *такие, что*

(1) $\forall\ C \in \mathbb{R}$ *часть линии уровня* $\operatorname{Re} S(z) = C$, *располагающаяся в области* U, *отображается отображением* f *в часть линии уровня* $\operatorname{Re} z^2 = C - \operatorname{Re} S(z_0)$, *располагающуюся в области* V;

(2) $\forall\ C \in \mathbb{R}$ *часть линии уровня* $\operatorname{Im} S(z) = C$, *располагающаяся в области* U, *отображается отображением* f *в часть линии уровня* $\operatorname{Im} z^2 = C - \operatorname{Im} S(z_0)$, *располагающуюся в области* V.

- *Другими словами, структура линий уровня функции* S *в окрестности точки* z_0 *такая же, как у функции* z^2.

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение

$$\forall\ z \in D \quad f(z) = \sqrt{S(z) - S(z_0)}.$$

При $z \to z_0$ справедливо разложение

$$f(z) = \sqrt{\frac{S''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)} = (z - z_0)\sqrt{\frac{S''(z_0)}{2} + O(z - z_0)}. \tag{14.19}$$

Из разложения (14.19) следует, что существует окрестность $\hat{U}$ точки z_0, в которой многозначная функция f допускает выделение двух регулярных ветвей f_1 и f_2 в $\hat{U}$. При этом очевидно, что ветви f_1 и f_2 отличаются лишь знаком.

Докажем, что f_1 является требуемым конформным отображением. Из (14.19) следует, что $f_1'(z_0) = \sqrt{\frac{S''(z_0)}{2}} \neq 0$. Отсюда и из теоремы 2.20 следует, что f_1 обратима в некоторой области U, содержащей точку z_0. Обозначим образ области U под действием функции f_1 через V. Из сказанного следует, что f является конформным отображением U на V.

Пусть теперь C – произвольная вещественная постоянная и z такая, что $\operatorname{Re} S(z) = C$ и $z \in U$. Обозначим образ z под действием отображения f через w. Легко видеть, что

$$\operatorname{Re} w^2 = \operatorname{Re} f^2(z) = \operatorname{Re} S(z) - \operatorname{Re} S(z_0) = C - \operatorname{Re} S(z_0),$$
$$\operatorname{Im} w^2 = \operatorname{Im} f^2(z) = \operatorname{Im} S(z) - \operatorname{Im} S(z_0) = C - \operatorname{Im} S(z_0). \ \square$$

Теорема 14.31 (Свойства монотонности функции $\operatorname{Re} S$ в окрестности простой точки перевала). *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$;
- $S \in \mathcal{H}(D)$;
- $z_0 \in D$ *– простая точка перевала функции* S.

Тогда существует окрестность U *точки* z_0 *такая, что*

(1) *линия уровня* $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ *в области* U *состоит из двух гладких кривых* γ_+ *и* γ_-;

(2) γ_+ *и* γ_- *пересекаются в точке* z_0 *под прямым углом;*

(3) *при удалении от точки* z_0 *вдоль кривой* γ_+ *функция* $\operatorname{Re} S(z)$ *возрастает;*

(4) *при удалении от точки* z_0 *вдоль кривой* γ_- *функция* $\operatorname{Re} S(z)$ *убывает.*

Доказательство. (1) Следует из теоремы 14.30.

(2) Следует из теорем 14.29 и 14.30 и свойства конформных отображений сохранять углы.

(3, 4) Следует из теоремы 14.30, и выполнения аналогичного свойства для функции z^2. $\square$

Определение 14.32 (Линия наискорейшего спуска). *Пусть*

- D *– область в* $\mathbb{C}$;
- $S \in \mathcal{H}(D)$;
- $z_0 \in D$ *– простая точка перевала функции* S;

- *в окрестности точки z_0 линия уровня $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ состоит из двух гладких кривых γ_+ и γ_-, пересекающихся в точке z_0;*
- *при удалении от точки z_0 вдоль кривой γ_- функция $\operatorname{Re} S(z)$ убывает.*

Тогда говорят, что γ_- – линия наискорейшего спуска функции S в окрестности точки перевала z_0.

Теорема 14.33 (Асимптотическое поведение интеграла типа Лапласа по перевальному контуру (вклад от точки перевала))**.** *Пусть*

- *D – область в $\mathbb{C}$;*
- *$f \in \mathcal{H}(D)$, $S \in \mathcal{H}(D)$;*
- *$z_0 \in D$ – простая точка перевала функции S;*
- *γ – линия наискорейшего спуска функции S в окрестности точки перевала z_0;*
- *на γ задана ориентация.*

Тогда

$$\int\limits_\gamma f(z)e^{\lambda S(z)}\,dz = e^{\lambda S(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(z_0)}}\left(f(z_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \tag{14.20}$$

при $\lambda \to +\infty$. Ветвь корня в формуле (14.20) выбирается так, чтобы

$$\arg\sqrt{\frac{1}{-S''(z_0)}} = \varphi_0, \tag{14.21}$$

где φ_0 – угол между касательным вектором к кривой γ, согласованным с выбором ориентации на γ, и положительным направлением вещественной оси.

Доказательство. Без доказательства. □

Пример 14.34. *Найти асимптотическое поведение интеграла*

$$\int\limits_{-0.4i}^{0.4i} (3+2z)e^{\lambda((1-i)z^2+z^3)}\,dz$$

при $\lambda \to +\infty$. Выписать старший член асимптотического ряда и написать порядок поправки.

Решение. Функция $S(z) = (1-i)z^2+z^3$ имеет две перевальные точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \frac{2(i-1)}{3}$. Линии уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_1)$ и $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_1)$ изображены на рисунке 26. Продеформируем контур интегрирования как показано на рисунке 26. При этом, очевидно, что

$$\int\limits_{-0.4i}^{0.4i} (3+2z)e^{\lambda((1-i)z^2+z^3)}\,dz = \int\limits_\gamma (3+2z)e^{\lambda((1-i)z^2+z^3)}\,dz.$$

Учитывая, что концы контура γ располагаются в области $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_1)$, вклад в асимптотику интеграла дает лишь малая окрестность точки перевала z_1. Таким образом, мы можем воспользоваться теоремой 14.33. Следовательно,

$$f(z) = 3+2z, \quad f(z_1) = 3,$$

$$S(z) = (1-i)z^2+z^3, \quad S(z_1) = 0, \quad S'(z_1) = 0, \quad S''(z_1) = 2(1-i).$$

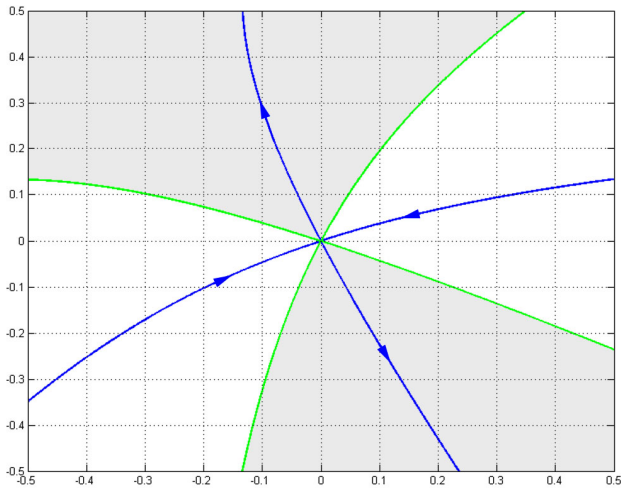

Рис. 26. Линия уровня $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_1)$ выделена зеленым цветом и $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_1)$ – синим. Синие стрелки указывают направления убывания функции $\operatorname{Re} S(z)$.

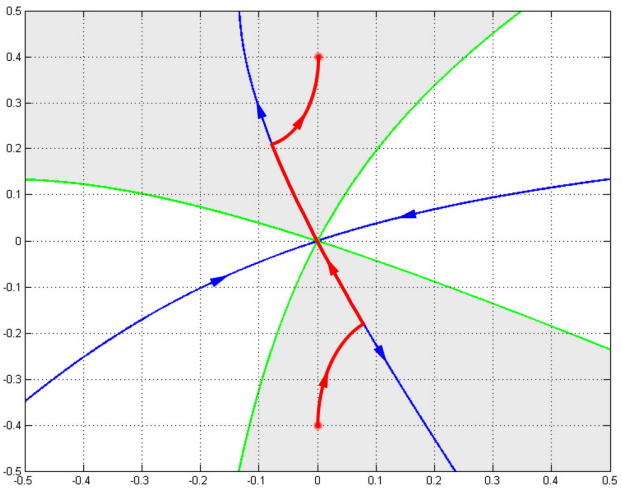

Рис. 27. Перевальный контур γ выделен красным цветом. Серым цветом окрашена область, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_1)$.

Для того чтобы найти угол наклона φ_0 контура γ в точке z_1, введем полярные координаты $z = r^{i\varphi}$ и заметим, что

$$S(z) = (1-i)z^2 + z^3 = \sqrt{2}\, r^2 e^{-\frac{\pi}{4}i + 2i\varphi} + O(r^2) = -\sqrt{2}\, r^2 e^{\frac{3\pi}{4}i + 2i\varphi} + O(r^2)$$

при $z \to 0$. Таким образом, угол наклона φ_0 может может быть найден из уравнения

$$e^{\frac{3\pi}{4}i + 2i\varphi_0} = 1.$$

Очевидно, что угол φ_0, согласованный с ориентацией контура γ, равен $\frac{5\pi}{8}$ (угол $-\frac{3\pi}{8}$ отвечает противоположно ориентированному контуру γ).

Наконец, из (14.20) и (14.21) следует, что

$$\int\limits_{\gamma} (3+2z) e^{\lambda((1-i)z^2+z^3)}\, dz = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda(i-1)}} \left(3 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = e^{\frac{5\pi}{8}i} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda\sqrt{2}}} \left(3 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

Окончательно,

$$\int\limits_{-0.4i}^{0.4i} (3+2z) e^{\lambda((1-i)z^2+z^3)}\, dz = e^{\frac{5\pi}{8}i} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda\sqrt{2}}} \left(3 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right), \quad \lambda \to +\infty. \ \square$$

Список литературы

[1] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного* // М., «Наука», (1989).
[2] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного* // М., «Наука», (1965).
[3] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели* // М., «Наука», (1973).
[4] М. И. Гуревич, *Теория струй идеальной жидкости* // М., «Наука», (1979).
[5] М. В. Федорюк, *Метод перевала* // М., «Наука», (1977).